MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. VII.
TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

ÍRTA:
DR. BAJCSAY PÁL

HARMADIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1971

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSI ENDRE
OKL. VILLAMOS MÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1971

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Harmadik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
A. V*. Határozott integrál (Első rész) (Második kiadás)
A. V**. Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Harmadik kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X*. A logarléc (Negyedik kiadás)

B.

B. I.–II–III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája). Skalár-, vektor- és tenzormezők (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Második kiadás)
B. VII*. Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Negyedik kiadás)
B. VII**. Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Második kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás. (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Második kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Harmadik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. VII.

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

ÍRTA:

DR. BAJCSAY PÁL

KANDIDÁTUS
EGYETEMI DOCENS

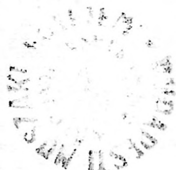
Harmadik kiadás

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. EGERVÁRY JENŐ
KÉTSZERES KOSSUTH-DÍJAS
AKADÉMIKUS, EGYETEMI TANÁR

ÉS

DR. KÖRMENDI ISTVÁN



KIADÁSÁT
A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER
RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus, professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat C. része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása a műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkozunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredmények közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kísérletében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzorainak helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B. és C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus, professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatos ága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban a műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ E KÖTETHEZ

A *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példatár jelen kötete tulajdonképpen folytatása a *Többváltozós függvények és differenciálásuk* című, A. VI. jelű kötetnek. A feldolgozott anyagra és példákra vonatkozó megjegyzéseim, amelyeket az említett kötet előszavában írtam, ide is vonatkoznak. Az ott elmondottakat csupán azzal szeretném kiegészíteni, hogy itt gyakrabban szerepelnek már inkább a vektoranalízis tárgykörébe vágó részek, melyek szorosan véve csak a sorozat további köteteiben kerülnek majd részletes tárgyalásra. Ez magyarázza azt, hogy itt kevesebb számú példa szerepel ezekből a részekből. Megemlítem azt, hogy a feladatok összeválogatásánál az átlagos olvasót nem kívántam túlzott követelmények elé állítani.

Köszönettel tartozom bírálóimnak, *dr. Egerváry Jenő* akadémikus professzornak és *Körmendi István* adjunktusnak, akik kéziratom átnézésével és számos, igen részletes megjegyzésükkel segítették munkámat.

Köszönettel tartozom továbbá *Fazekas Ferenc* főszerkesztőnek, valamint az ábrák gondos elkészítéséért *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnöknek.

DR. BAJCSAY PÁL

E kötet

TARTALOMJEGYZÉKE

1. §. Paraméteres integrál

2. §. Tartományintegrálok

3. §. Kettős és hármas integrálok

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

4. §. Az integrációs változók transzformációja

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

5. §. Geometriai alkalmazások

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

PÉLDÁK, EREDMÉNYTÁR

1. §. Paraméteres integrál*

a) Kétváltozós függvény integrálja

Legyen $z = f(x, y)$ egy

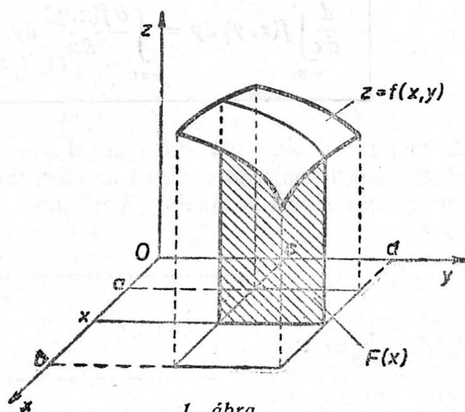
$$T: \quad a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

tartományban folytonos függvény. Az $x = \text{const}$ sík az e függvényt ábrázoló felületet egy

$$z = f(x = \text{const}, y)$$

síkgörbében metszi. E síkgörbe „alatti" terület (1. ábra):

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy\,.$$

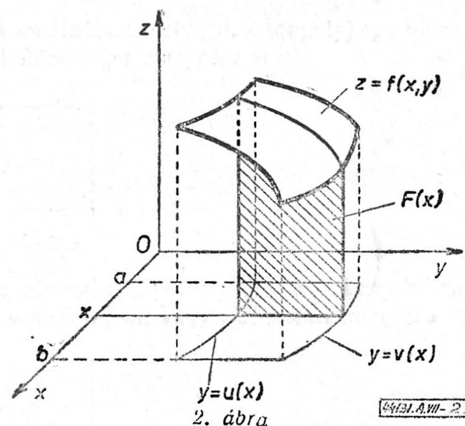


1. ábra

Ha x helyébe egy másik állandót írunk, egy hasonló integrálra jutunk. Egy integrálnál tehát ugyan x állandó, de integrálról integrálra változik; az integrál az x paraméter függvénye, ú. n. *paraméteres integrál.* $z = f(x, y)$ folytonossága következtében $F(x)$ az x-nek folytonos függvénye.

A paraméteres integrál akkor is folytonos, ha határai nem állandók, hanem az a és b között az x paraméternek folytonos, egyértékű függvényei, vagyis ha a T tartományt az $x = a$, $x = b$ egyenesek mellett az $y = u(x)$, $y = v(x)$ folytonos görbék határolják (2. ábra):

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy.$$



2. ábra

* L. részletesen az A V.** kötet 11. §-ában.

b) Paraméteres integrál paraméter szerinti differenciálása

Ha a T tartományban $f(x, y)$ az x szerint még differenciálható is és az f'_x parciális derivált e tartományban folytonos, továbbá a határok is x-nek differenciálható függvényei, akkor a paraméteres integrál a paraméter szerint differenciálható.

α) Állandó határok mellett

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy\,,$$

azaz a differenciálás egyszerűen az integrálás jele alatt elvégezhető *(Leibniz szabálya)*:

β) változó határok esetén:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\,dy = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy + f\Big(x, v(x)\Big)\frac{dv}{dx} - f\Big(x, u(x)\Big)\frac{du}{dx}$$

2. §. Tartományintegrálok

a) Különböző tartományintegrálok definíciója

Valamely mérhető T tartomány P pontjaiban értelmezett $f(P)$ folytonos és egyértékű függvénynek e tartományra kiterjesztett integrálján azt a határértéket értjük, amelyhez a

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta T_i$$

összeg tart, ha a ΔT_i mértékű résztartományok legnagyobb átmérője 0-hoz tart, azaz, ha a T tartomány résztartományokra osztását minden határon túl finomítjuk úgy, hogy valamennyi rész átmérője zérushoz konvergáljon. Itt P_i jelenti az i-edik résztartomány tetszés szerinti pontját:

$$\lim_{\text{Max}\Delta T_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta T_i = \int_T f(P)\, dT\,.$$

A gyakorlatban előforduló tartományok egy-, két- vagy háromméretűek.

α) Közönséges integrál

Ha az egyméretű tartomány valamelyik koordinátatengely (pl. x-tengely) egy bizonyos $[a\ b]$ szakasza, akkor a tartományintegrál *közönséges integrál:*

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

β) Vonalintegrál

Ha az egyméretű tartomány egy tetszés szerinti irányított görbe vonal egy bizonyos L szakasza, akkor a tartományintegrál ú. n. *vonalintegrál*, vagy *görbementi integrál:*

$$\int_L f(P)\, dl\,.$$

γ) Felületi integrál

Ha a kétméretű tartomány valamely irányított F felületdarab, akkor az

$$\int_F f(P)\, dF$$

integrál az ú. n. *felületi integrál.*

δ) Térintegrál

Ha a háromméretű tartomány a V térrész, akkor az

$$\int_V f(P)\, dV$$

integrál az ú. n. *térintegrál.*

A két- és háromméretű tartományintegrálok *kettős-*, illetve *hármasintegrálok.*

b) **Tartományintegrálok alaptulajdonságai**

α) Végesszámú $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P)$ függvény összegének a T tartományra kiterjesztett integrálja egyenlő az összeadandó függvények tartományintegráljainak összegével:

$$\int_T [f_1(P) + f_2(P) + \ldots + f_n(P)]\, dT = \int_T f_1(P)\, dT + \int_T f_2(P)\, dT + \ldots + \int_T f_n(P) dT\,.$$

β) Az integrálandó függvény állandó együtthatója kiemelhető az integráljel elé:

$$\int_T c \cdot f(P)\, dT = c \int_T f(P)\, dT\,.$$

γ) Ha a T tartomány a $T_1, T_2, \ldots, T_n$ részekre van felosztva, úgyhogy $T_1 + T_2 + \ldots + T_n = T$, akkor

$$\int_T f(P)\, dT = \int_{T_1} f(P)\, dT + \int_{T_2} f(P)\, dT + \ldots + \int_{T_n} f(P)\, dT\,.$$

c) **Középértéktétel**

A folytonos $f(P)$ függvény tartományintegrálja egyenlő az integrálási tartomány bizonyos (P_k) pontjában vett függvényértéknek és az integrálási tartomány mértékének szorzatával:

$$\int_T f(P)\, dT = f(P_k) \cdot T\,.$$

Innen

$$f(P_k) = \frac{1}{T}\int_T f(P)\,dT\,.$$

Az $f(P_k)$ nem más, mint az adott $f(P)$ folytonos *függvény középértéke a T tartományban.*

d) Tartomány szerinti differenciálás

Ha az $f(P)$ függvénynek egy, a P_0 pontot tartalmazó ΔT tartományra vonatkozó középértékét képezzük, s azután a $\Delta T \to 0$ határátmenetet elvégezzük, akkor

$f(P_k) \to f(P_0)$ miatt

$$f(P_0) = \lim_{\Delta T\to 0} \frac{1}{\Delta T}\int_{\Delta T} f(P)\,dT\,.$$

Ezt a határátmenetet *tartomány szerinti differenciálásnak* nevezzük.

A tartományintegrál P pontban vett tartomány szerinti differenciálhányadosa az integrálandó függvénnyel egyenlő:

$$\frac{d}{dT}\int_T f(P)\,dT = f(P)\,.$$

3. §. Kettős és hármas integrálok

a) **Kettős integrál definíciója**

Legyen $z = f(P) = f(x, y)$ egy az (x, y) sík mérhető T tartományán egyértékű, folytonos függvény. E függvénynek a T tartományra kiterjesztett integrálját úgy értelmezhetjük, hogy a tartományt koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel részekre osztjuk. Egy ilyen résztartomány a $\Delta x_i \, \Delta y_k$ területű derékszögű négyszög. E négyszög egy tetszés szerinti pontja a $P(\xi_i, \eta_k)$ pont.

Meghatározás szerint a

$$\sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k) \, \Delta x_i \, \Delta y_k$$

összeg határértéke, a Max $\Delta x_i \to 0$, Max $\Delta y_k \to 0$ határátmenet mellett, a függvény T tartományra kiterjesztett kettős integrálja:

$$\lim_{\substack{\mathrm{Max}\,\Delta x_i \to 0 \\ \mathrm{Max}\,\Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(\xi_i, \eta_k) \, \Delta x_i \, \Delta y_k = \iint_T f(x, y) \, dx \, dy = \int_T f(P) \, dT \, .$$

b) **Hármas integrál definíciója**

A $z = f(P) = f(x, y, z)$ egyértékű, folytonos függvénynek a mérhető, háromméretű V (köbtartalommal bíró) tartományra kiterjesztett integrálját úgy értelmezhetjük, hogy a tartományt koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal részekre osztjuk. Egy ilyen résztartomány a $\Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$ köbtartalmú derékszögű parallelepipedon. E parallelepipedon egy tetszés szerinti pontja a $P(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ pont.

Meghatározás szerint a

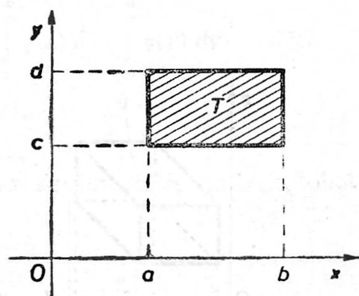
$$\sum_i \sum_j \sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \, \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$$

összeg határértéke, a Max $\Delta x_i \to 0$, Max $\Delta y_j \to 0$, Max $\Delta z_k \to 0$ határátmenet mellett, a függvény V tartományra kiterjesztett hármas integrálja:

$$\lim_{\substack{\mathrm{Max}\,\Delta x_i \to 0 \\ \mathrm{Max}\,\Delta y_j \to 0 \\ \mathrm{Max}\,\Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \, \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_V f(P) \, dV$$

c) Kettős integrál kiszámítása kétszeres integrálással

A kettős és hármas integrál egymást követő egyszerű integrálásra, kétszeri, illetve háromszori integrálásra vezethető vissza, a következő tételek szerint:



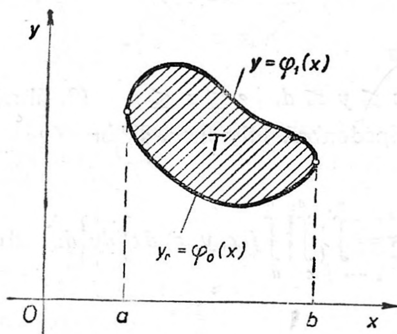
3. ábra

α) Legyen $f(x, y)$ a

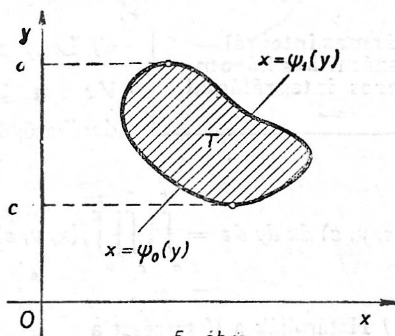
$$T: \quad a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d \quad (3.\ \text{ábra})$$

derékszögű négyszögön folytonos, akkor

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx .^*$$



4. ábra



5. ábra

β) Határolják a T tartományt az

$$y = \varphi_0(x), \qquad y = \varphi_1(x), \qquad (a \leqq x \leqq b) \qquad (4.\ \text{ábra})$$

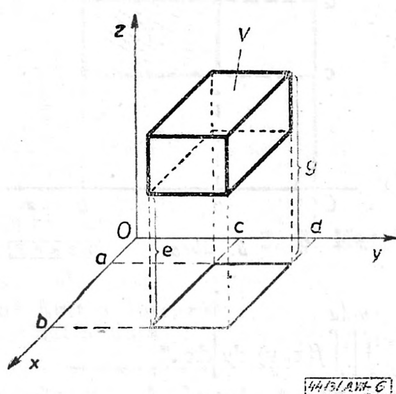
illetve

$$x = \psi_0(y), \qquad x = \psi_1(y), \qquad (c \leqq y \leqq d) \qquad (5.\ \text{ábra})$$

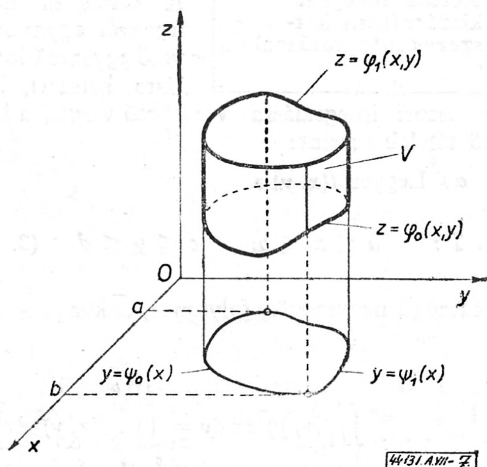
egyrétű, folytonos görbék. Ha $f(x, y)$ e tartományban folytonos, akkor

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_0(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y)\, dx \right] dy .$$

* *Megjegyzés.* A későbbiekben a két (illetőleg több) integrálást elválasztó zárójelet elhagyjuk.



6. ábra



7. ábra

d) Hármas integrál kiszámítása háromszoros integrálással

α) Legyen $f(x, y, z)$ a

V: $a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d, \quad e \leqq z \leqq g$ (6. ábra)

derékszögű parallelepipedonban folytonos, akkor

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_e^g f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx = \int\limits^g \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x, y, z)\,dx \right] dy \right\} dz \quad \text{stb.}$$

β) Határolják a V térrészt a

$$z = \varphi_0(x, y), \quad z = \varphi_1(x, y), \quad \left| \begin{matrix} \psi_0(x) \leqq y \leqq \psi_1(x) \\ a \leqq x \leqq b \end{matrix} \right| \qquad (7.\ \text{ábra})$$

egyrétű, folytonos felületek, akkor

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} \left[\int\limits_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Megjegyzés

A többszörös integrál az egyes változók szerinti közönséges integrálok szorzataként számítható, ha az integrálok határai állandók és az integrálandó függvény olyan tényezők szorzatára bontható, melyek csupán egy-egy változónak a függvényei.

Pl. ha $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ és a T tartomány határai

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d,$$

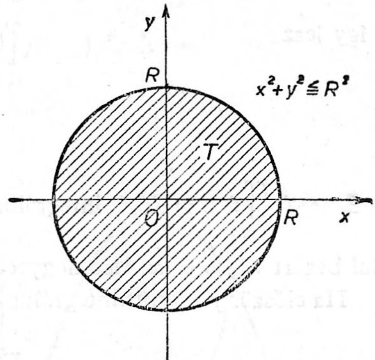
akkor

$$\int_c^a \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy = \int_c^a \left[\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(y)\, dx \right] dy = \int_a^b \varphi(x)\, dx \cdot \int_c^a \psi(y)\, dy .$$

Példák:

1. Határozzuk meg a $\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$ integrálban az integrálás határait, ahol T az

$x^2 + y^2 \leqq R^2$ zárt körtartomány (8. ábra).



8. ábra

Ha az integrálást először x szerint és azután y szerin végezzük, akkor

$$-\sqrt{R^2 - y^2} \leqq x \leqq +\sqrt{R^2 - y^2},$$
$$-R \leqq y \leqq +R,$$

és így lesz

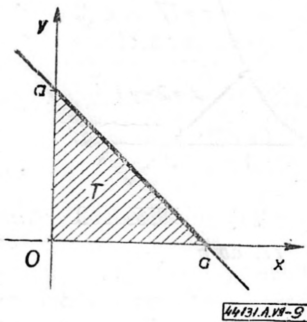
$$\int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy .$$

Ha viszont először y szerint és azután x szerint integrálunk, akkor

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \leqq y \leqq +\sqrt{R^2 - x^2},$$
$$-R \leqq x \leqq +R,$$

és így lesz

$$\int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx.$$



9. ábra

2. Határozzuk meg az $\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$ integrál határait, ha a T tartomány az $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ egyenesek által határolt véges háromszögtartomány (9. ábra).

Ha először x szerint és azután y szerint integrálunk, akkor

$$0 \leqq x \leqq a - y,$$
$$0 \leqq y \leqq a ,$$

és így lesz

$$\int_0^a \int_0^{a-y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Megfordítva, ha előbb y szerint és azután x szerint integrálunk, akkor

$$0 \leqq y \leqq a - x,$$

$$0 \leqq x \leqq a,$$

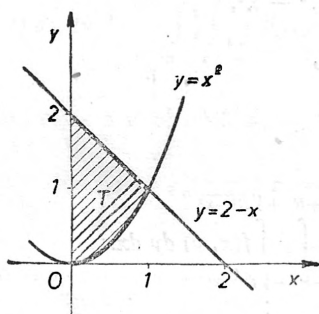
és így lesz

$$\int_0^a \int_0^{a-x} f(x, y)\, dy\, dx.$$

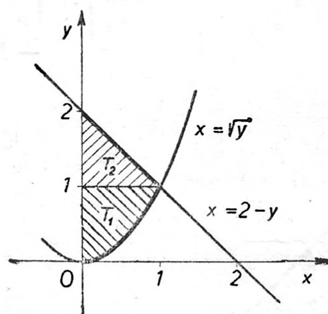
3. A $\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$ integrálban a T tartomány az $x = 0$, $y = 2 - x$, $y = x^2$ görbék által bezárt véges és az első negyedben fekvő síkrész. Mik lesznek az integrálás határai? Ha először y szerint integrálunk és azután x szerint, akkor

$$x^2 \leqq y \leqq 2 - x,$$

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad (10.\ \text{ábra})$$



10. ábra



11. ábra

és így lesz

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Ha az integrálás sorrendjét megcseréljük, akkor az alaptartományt az ábra szerint (11. ábra) két részre kell osztanunk:

T_1-ben:

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{y},$$
$$0 \leqq y \leqq 1;$$

T_2-ben:

$$0 \leqq x \leqq 2 - y,$$
$$1 \leqq y \leqq 2.$$

Így

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{T_2} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy.$$

4. Határozzuk meg az

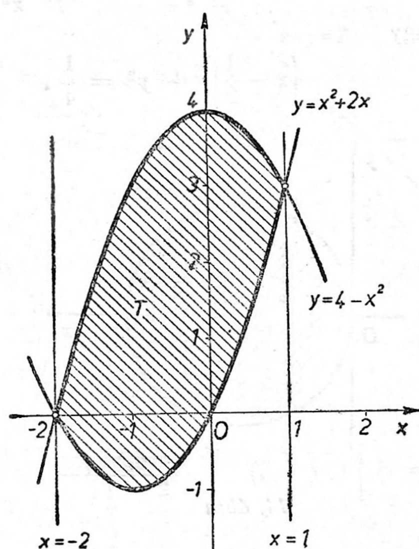
$$\int_{-2}^{1} \int_{x^2+2x}^{4-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$$

kettős integrál integrálási tartományát.

Az adott integrálban

$$x^2 + 2x \leqq y \leqq 4 - x^2,$$
$$-2 \leqq x \leqq 1 \quad \text{(12. ábra)}$$

Tehát a kérdéses alaptartományt az $y = x^2 + 2x$, $y = 4 - x^2$ parabolák és az $x = -2$, $x = 1$ egyenesek határolják.



12. ábra

5. Határozzuk meg az

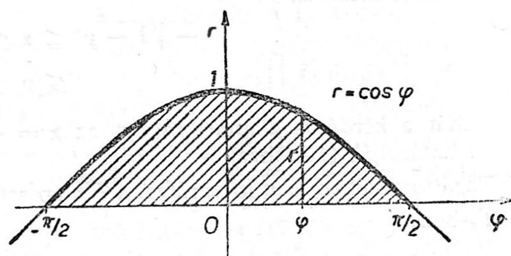
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\varphi} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi$$

kettős integrál integrálási alaptartományát.

A (φ, r) derékszögű koordinátarendszerben az alaptartományt a 13. ábra mutatja. Polárkoordinátarendszerben viszont az alaptartomány a 14. ábra szerinti.

Ugyanis a T tartományt a következő egyenlőtlenségekkel határozhatjuk meg:

$$0 \leqq r \leqq \cos\varphi$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$



13. ábra

A derékszögű koordináták és a polárkoordináták

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

összefüggése szerint a mi esetünkben

$$x = \cos \varphi \cos \varphi = \cos^2 \varphi,$$
$$y = \cos \varphi \sin \varphi,$$

ahonnan

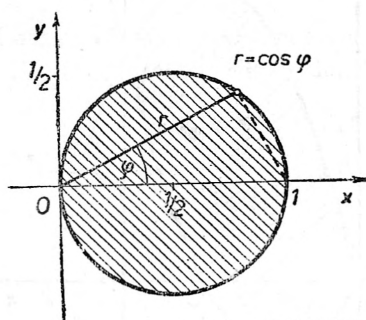
$$x^2 + y^2 = \cos^2 \varphi,$$

azaz

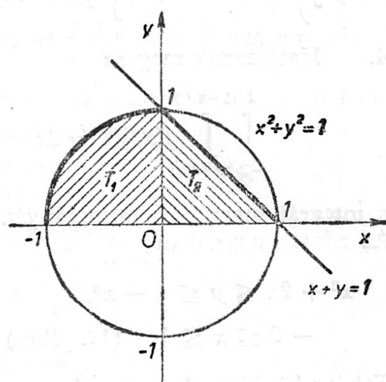
$$x^2 + y^2 = x,$$

vagy

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$



14. ábra



15. ábra

6. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrálban.

Az adott integrálban

$$-\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq 1 - y,$$
$$0 \leqq y \leqq 1.$$

Tehát a kérdéses alaptartományt az $x = -\sqrt{1-y^2}$, $x = 1 - y$, $y = 0$, $y = 1$ görbék határolják (15. ábra).

Fordított sorrendben integrálva, a T alaptartományt két részre kell osztanunk:

T_1-ben:

$$0 \leqq y \leqq +\sqrt{1-x^2},$$
$$-1 \leqq x \leqq 0;$$

T_2-ben:

$$0 \leqq y \leqq 1 - x,$$
$$0 \leqq x \leqq 1.$$

Így

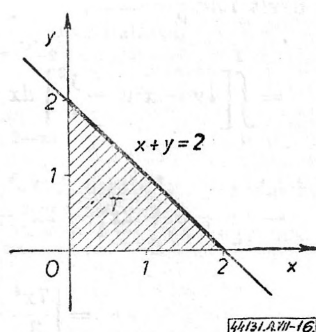
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{0} \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy\, dx.$$

7. Számítsuk ki a

$$\iint_T (x + y)\, dx\, dy$$

kettős integrált, ha a háromszög alakú véges T tartomány határai:

$$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2.$$



16. ábra

Az integrálás alaptartománya a 16. ábrán látható. Integráljunk először x szerint, azután y szerint. Akkor

$$0 \leqq x \leqq 2 - y,$$
$$0 \leqq y \leqq 2,$$

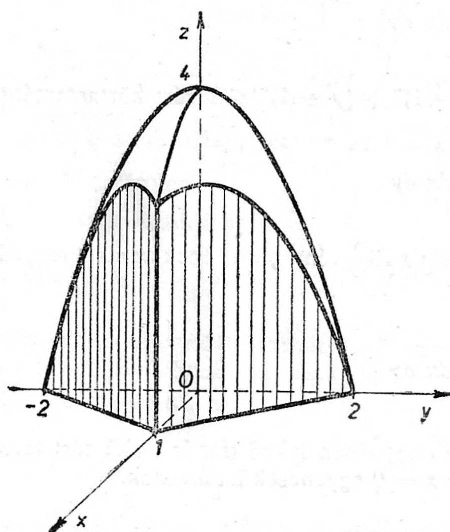
és így

$$\iint_T (x + y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{2-y} (x + y)\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{(2-y)^2}{2} + (2 - y)\, y\right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left(2 - 2y + \frac{y^2}{2} + 2y - y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left[2y - \frac{y^3}{6}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3}.$$



17. ábra

8. Számítsuk ki a

$$\iiint_V dx\, dy\, dz$$

hármas integrált, ha a V térrészt a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgási paraboloid, a $z = 0$, $y + 2x = 2$, $2x - y = 2$, $x = 0$ és $x = 1$ síkok határolják (17. ábra).

Integráljunk először z szerint, azután y és végül x szerint.

Akkor

$$0 \leqq z \leqq 4 - x^2 - y^2,$$
$$2x - 2 \leqq y \leqq 2 - 2x,$$
$$0 \leqq x \leqq 1,$$

és így lesz

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_{2x-2}^{2-2x} \int_0^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{2x-2}^{2-2x} (4 - x^2 - y^2)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{2x-2}^{2-2x} dx = \int_0^1 \left(8 - 8x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{8}{3} + 8x - 8x^2 + \frac{8x^3}{3} - \right.$$

$$\left. - 8x + 8 + 2x^3 - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 8x^2 + 8x - \frac{8}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{28x^3}{3} - 20x^2 + \frac{32}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{7x^4}{3} - \frac{20x^3}{3} + \frac{32x}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{20}{3} + \frac{32}{3} = \frac{19}{3}.$$

Ez az eredmény egyben a V térrész térfogatának mérőszáma.

Feladatok

a) Integrálási határok meghatározása

1. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1$ zárt körtartomány.

2. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az $y = \sin x$ függvény görbéjének az első negyedben lévő első felhulláma alatti terület.

3. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az első negyedben fekvő trapéz alakú zárt tartomány, melyet az $y = 0$, $y = 2$, $y = 4 - 2x$ és $x = 0$ egyenesek határolnak.

4. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az az $x \geqq 0$ félsíkban fekvő háromszög alakú zárt tartomány, melyet az $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$ és $x = 0$ egyenesek határolnak.

5. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az az első negyedben fekvő parabolaszelet alakú zárt tartomány, melyet az $y = 2x - x^2$ parabola és az $y = 0$ egyenes határol.

6. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az az első negyedben fekvő parabolaszelet alakú zárt tartomány, melyet az $y = 1 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}x^2$ parabola és az $y = 1 - \frac{1}{2}x$ egyenes határol.

7. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

integrálban az integrálás határait, ha T az $y = \frac{1}{2}$ és $y = \frac{3}{2}$ egyenesek között fekvő és az $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ körből kivágott körszelet alakú zárt tartomány.

8. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi$$

integrálban az integrálás határait, ha T az az (x, y)-sík első negyedében fekvő szektorszerű zárt síktartomány, melyet az $r = e^{\varphi}$ logaritmikus spirális és a $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ egyenesek határolnak.

9. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi$$

integrálban az integrálás határait, ha T az $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ lemniszkáta jobboldali félsíkban fekvő hurka által bezárt tartomány.

10. Határozzuk meg a

$$\iint_T f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi$$

integrálban az integrálás határait, ha T az a háromszög alakú zárt tartomány, melyet az $r \cos \varphi = 2$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ egyenesek határolnak.

b) Integrálási tartomány meghatározása

Határozzuk meg az alábbi kettős integrálok integrálási tartományát:

1. $\int\limits_0^2 \int\limits_{y-1}^{y+2} f(x, y)\, dx\, dy.$

2. $\int\limits_0^4 \int\limits_0^{4x-x^2} f(x, y)\, dy\, dx.$

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{1}{1-\cos\varphi}} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi.$

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\varphi} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi.$

5. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \int\limits_1^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy.$

6. $\int\limits_0^1 \int\limits_{-x}^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx.$

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\cos\varphi} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi.$

8. $\int\limits_0^2 \int\limits_y^{3-\frac{y}{2}} f(x, y)\, dx\, dy.$

9. $\int\limits_{-2}^2 \int\limits_{1-\frac{x^2}{9}}^{2+\frac{x^2}{4}} f(x, y)\, dy\, dx.$

10. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx.$

c) Integrálás sorrendjének felcserélése

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi adott kettős integrálokban:

1. $\int\limits_0^2 \int\limits_{\frac{y}{2}}^{4-\frac{y}{2}} f(x, y)\, dx\, dy.$

2. $\int\limits_0^2 \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy.$

3. $\int\limits_0^2 \int\limits_{\sqrt{y}}^4 f(x, y)\, dx\, dy.$

4. $\int\limits_0^3 \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx + \int\limits_3^4 \int\limits_{2x-6}^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx.$

5. $\int\limits_{-2}^{-1} \int\limits_{y^2}^4 f(x, y)\, dx\, dy + \int\limits_{-1}^1 \int\limits_1^4 f(x, y)\, dx\, dy + \int\limits_1^2 \int\limits_{y^2}^4 f(x, y)\, dx\, dy.$

d) **Kettős integrál kiszámítása**

Számítsuk ki az alábbi adott kettős integrálokat:

1. $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} (x + y)\, dy\, dx.$

2. $\int_0^1 \int_y^1 (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$

3. $\int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{(x + y)^2}\, dx\, dy.$

4. $\int_1^3 \int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\, dx\, dy.$

5. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$

6. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\, dy\, dx.$

7. $\int_0^b \int_0^a \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dx\, dy.$

8. $\int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dy\, dx.$

9. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)\, dx\, dy.$

10. $\int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} xy\, dy\, dx.$

11. $\int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy\, dx.$

12. $\int_0^\pi \int_0^y \cos(x + y)\, dx\, dy.$

13. $\int_0^3 \int_0^{3-y} (2x + y)\, dx\, dy.$

14. $\int_0^1 \int_x^{5x} (x + 6y)\, dy\, dx.$

15. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy\, dx.$

16. $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xy\, dy\, dx.$

17. $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2y} (x^2 + y + 1)\, dx\, dy.$

18. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)\, dy\, dx.$

19. $\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx.$

20. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{4x - y^2}\, dy\, dx.$

e) **Hármas integrál kiszámítása**

Számítsuk ki az alábbi adott hármas integrálokat:

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}\, dz\, dy\, dx.$

2. $$\int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz\,dy\,dx.$$

3. $$\int_{0}^{a}\int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dz\,dy\,dx.$$

4. $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{3} (2x-4y+6z-3)\,dz\,dy\,dx.$$

5. $$\int_{1}^{3}\int_{1}^{3}\int_{1}^{3} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

4. §. Az integrációs változók transzformációja

a) Kettős integrál változóinak transzformációja

A

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrálban az

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

függvények közvetítésével vezessük be az u, v új változókat. Ezt megtehetjük, ha e függvényrendszer kölcsönösen egyértelmű és megfordítható módon képezi le egymásra az (x, y) sík T tartományát és az (u, v) sík T' tartományát. Ennek szükséges feltétele, hogy e függvényrendszer

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Jacobi-féle determinánsa (függvénydeterminánsa) zérustól különböző legyen. Ekkor

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T'} f\left[x(u, v), y(u, v)\right] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv .$$

b) Hármas integrál változóinak transzformációja

A

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

hármas integrálban az

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$$

függvények közvetítésével vezessük be az u, v, w új változókat. Ha e függvényrendszer kölcsönösen egyértelmű és megfordítható leképezését jelenti, az x, y, z koordinátarendszer

V térrészének az u, v, w koordinátarendszer V' térrészére, aminek szükséges feltétele, hogy a

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Jacobi-féle determináns (függvénydetermináns) zérustól különböző legyen, akkor

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right] \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw.$$

Példák

1. Az x, y derékszögű koordináták helyett vezessük be új változóknak az r, φ polárkoordinátákat a

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy$$

kettős integrálban, ahol a T tartomány az $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ kör kerületével bezárt terület.

Kiszámítjuk az

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

függvényrendszer Jacobi-féle determinánsát.

Mivel

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi,$$

azért

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Így

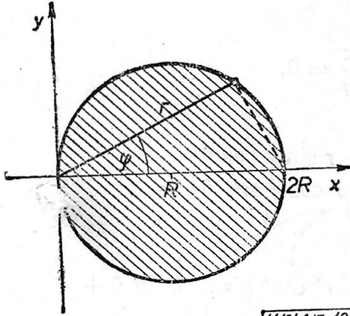
$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

Az integrálás alaptartománya a 18. ábra szerinti.

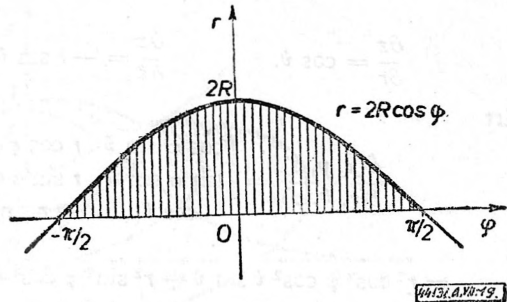
Egyszerű geometriai összefüggés alapján a tartomány határgörbéje polárkoordinátákban:

$$r = 2R\cos\varphi, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

A T' tartomány a 19. ábrán látható.



18. ábra



19. ábra

Ebben

$$0 \leqq r \leqq 2R\cos\varphi,$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Így

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{T'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2R\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

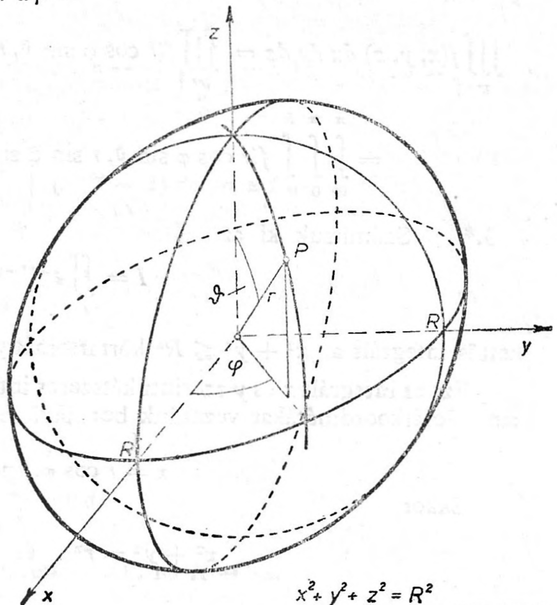
2. A

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

hármas integrál V tartománya legyen az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömbfelület által bezárt térrész. Alakítsuk át az integrált, új változókként gömbkoordinátákat vezetve be.

A $P(x, y, z)$ pont gömbkoordinátái (20. ábra):

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta,$$
$$z = r\cos\vartheta.$$



20. ábra

Mivel

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \sin\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = r\cos\varphi\cos\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \sin\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r\sin\varphi\cos\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\vartheta, \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = -r\sin\vartheta, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

azért

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta\sin\vartheta +$$

$$+ r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta\sin\vartheta = r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta.$$

Az r, ϑ, φ változók V' tartományában

$$0 \leqq r \leqq R,$$

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Így

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

3.* Számítsuk ki az

$$I = \iint\limits_T e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

kettős integrált az $x^2 + y^2 \leqq R^2$ körtartományban (21. ábra).

Ezt az integrált x és y szerinti kétszeres integrálással elemi úton nem tudjuk kiszámítani. Polárkoordinátákat vezetünk be:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Ekkor

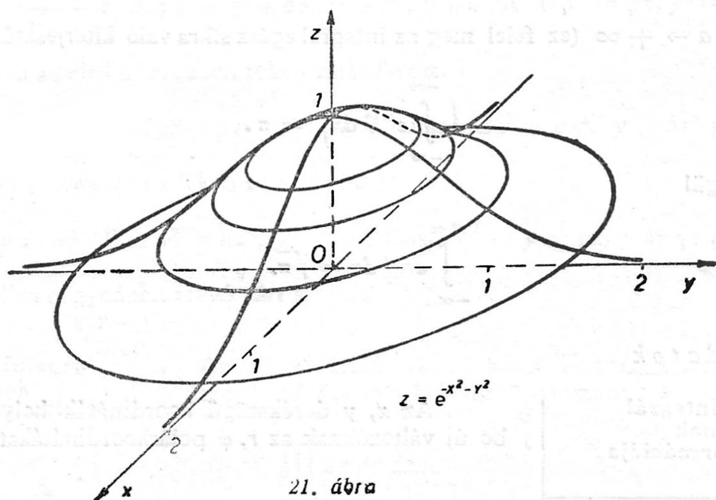
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{és} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r.$$

* L. az A V.** kötet 9—11. §-ában.

Az integrál határai a következők lesznek:

$$0 \leqq r \leqq R,$$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$



21. ábra

Így

$$I = \iint_{T'} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (-2r)\,e^{-r^2}\,dr\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[e^{-r^2}\Big]_0^R d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{-R^2}-1)\,d\varphi = \pi\,(1-e^{-R^2}).$$

Ezt az eredményt használjuk fel az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Gauss-féle hibaintegrál értékének kiszámításánál.

Ugyanis

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

az egész síkra kiterjesztve megfelel I határértékének, ha $R \to \infty$, tehát

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi.$$

Másrészt

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx \int_{-a}^{+a} e^{-y^2}dy = \left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

És ha $a \to +\infty$ (ez felel meg az integrál egész síkra való kiterjesztésének), akkor

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi.$$

Így végül

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Feladatok

a) **Kettős integrál változóinak transzformációja**

1. Az x, y derékszögű koordináták helyett vezessük be új változóknak az r, φ polárkoordinátákat az

$$\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} xy\,dx\,dy$$

kettős integrálban és számítsuk ki az integrál értékét.

Az alábbi feladatokban adott T zárt síkrész területének mérőszámát kell meghatároznunk a

$$\iint_T dx\,dy$$

kettős integrállal. Minthogy azonban az x, y változókkal az integrálás nehezen végezhető el, célszerű új változókat bevezetni. Az alábbi feladatokban mindenütt $0 < p < q$ és $0 < a < b$.

2. T az $xy = p$, $xy = q$, valamint az $y = ax$ és $y = bx$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

Útmutatás: Új változókat vezetünk be az $xy = \xi$ $(p \leqq \xi \leqq q)$ és az $y = \eta x$ $(a \leqq \eta \leqq b)$ függvények közvetítésével.

3. T az $xy = p$, $xy = q$, valamint az $y^2 = ax$, $y^2 = bx$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

4. T az $x^2 = py$, $x^2 = qy$, valamint az $y = ax$, $y = bx$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

5. T az $x + y = p$, $x + y = q$, valamint az $y = ax$, $y = bx$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

6. T az $y^2 = px$, $y^2 = qx$, valamint az $x^2 = ay$, $x^2 = by$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

Új változókat vezetve be, számítsuk ki az alábbi kettős integrálokat az adott T tartományban. Itt is $0 < p < q$, $0 < a < b$.

7. $\iint\limits_T \frac{x^2 \sin xy}{y}\, dx\, dy$; T az $x^2 = ay$, $x^2 = by$, valamint az $y^2 = px$, $y^2 = qx$ görbék által határolt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

8. $\iint\limits_T xy\, dx\, dy$; T az $y^2 = px$, $y^2 = qx$, valamint az $y = ax^3$, $y = bx^3$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

9. $\iint xy\, dx\, dy$; T az $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, valamint az $y = px$, $y = qx$ görbék által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

b) **Hármas integrál változóinak transzformációja**

Az alábbi feladatokban adott V zárt térrész térfogatának mérőszámát kell meghatároznunk a

$$\iiint\limits_V dx\, dy\, dz$$

hármas integrállal. Minthogy azonban az x, y, z derékszögű koordinátákkal az integrálás nehezen végezhető el, célszerű új változókat bevezetni.

1. V az $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$ felület által bezárt térrész. Új változóknak az

$$x = r \sin \varphi \cos \vartheta, \qquad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \qquad z = r \cos \varphi$$

függvények közvetítésével az r, φ, ϑ *gömbkoordinátákat* vezetjük be.

2. V az $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz$ felület által bezárt térrész. Új változóknak, mint az előbbi feladatban, gömbkoordinátákat vezetünk be.

3. V az $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$ felület által bezárt térrész. Új változóknak, mint előbb, gömbkoordinátákat vezetünk be.

4. V az $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2 y}{h^3}$ felület által bezárt térrész (a, b, c és h zérustól különböző állandók). Új változóknak az

$$x = ar \sin \varphi \cos \vartheta, \qquad y = br \sin \varphi \sin \vartheta, \qquad z = cr \cos \varphi$$

függvényekkel definiált *ellipszoid-koordinátákat* vezetjük be.

5. V az $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ felület által bezárt térrész (a, b és c zérustó különböző állandók). Új változókat vezetünk be az

$$x = ar \sin^3 \varphi \cos^3 \vartheta, \qquad y = br \sin^3 \varphi \sin^3 \vartheta, \qquad z = cr \cos^3 \varphi$$

függvények közvetítésével.

5. §. Geometriai alkalmazások

a) Síkrész területe

Az (x, y) sík T tartományára kiterjesztett

$$\iint_T dx\,dy$$

kettős integrál a T síkrész területének mérőszámával egyenlő.

b) Hengerszerű test térfogata

Az (x, y) sík T tartományára kiterjesztett

$$\iint_T f(x, y)\,dx\,dy$$

kettős integrál annak a hengerszerű testnek a térfogatát adja, melyet az (x, y) sík T síkrésze, e síkrész határgörbéjére állított, z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerpalást és a $z = f(x, y)$ felület határol.

c) Felületdarab felszíne

A $z = f(x, y)$ felület (x, y) sík T tartománya felett fekvő darabjának felszíne az

$$\iint_T \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\,dxdy$$

kettős integrállal számítható.

Ha a felület egyenlete az

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

kétparaméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor az integráltranszformáció szabálya alapján, a felszínre a

$$\iint_{T'} \sqrt{(x_u' y_v' - y_u' x_v')^2 + (y_u' z_v' - z_u' y_v')^2 + (z_u' x_v' - x_u' z_v')^2}\,du\,dv$$

képlet adódik.

Ez utóbbi képlet az

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,$$
$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v',$$
$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$$

jelölésekkel a következő egyszerűbb alakban írható:

$$\iint_{T'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,.$$

Ha a felület paraméteres megadása esetén a felület egy tetszés szerinti pontjához mutató helyvektort* bevezetjük:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

akkor a felület tulajdonképpen kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel megadottnak tekinthető:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k}$$

Ezzel az írásmóddal az F felületdarab felszíne:

$$\iint_{T'} |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\, du\, dv = \iint_{T'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,,$$

ahol

$$E = \boldsymbol{r}'^2_u, \quad F = \boldsymbol{r}'_u \boldsymbol{r}'_v, \quad G = \boldsymbol{r}'^2_v.$$

A felületnek $z = z(x, y)$ függvénnyel való megadása az előbbinek az a speciális esete, amikor az u, v paraméterek helyett x és y a paraméterek:

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z(x, y)\,\boldsymbol{k}\,.$$

Ez esetben

$$\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = -z'_x\boldsymbol{i} - z'_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

és a felületdarab felszíne:

$$\iint_{T} |\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y|\, dx\, dy = \iint_{T} \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}\, dx\, dy\,.$$

d) **Térrész térfogata**

Az $f(x, y, z) \equiv 1$ függvénynek a tér valamely V zárt tartományára kiterjesztett hármas integrálja:

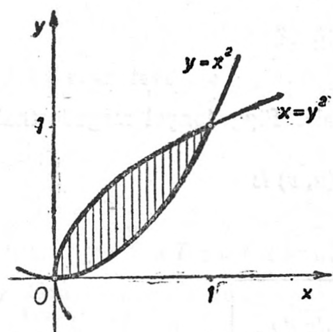
$$\iiint_V dx\, dy\, dz$$

a V térrész térfogatával egyenlő.

* L. részletesebben a B. II. és B. III. kötetekben.

Példák

1. Határozzuk meg az $y = x^2$, $x = y^2$ görbék által bezárt terület mérőszámát kettős integrállal (22. ábra).



22. ábra

A kérdéses területet a

$$\iint_T dx\, dy$$

kettős integrál adja meg, ahol T határai:

$$y^2 \leqq x \leqq \sqrt{y},$$
$$0 \leqq y \leqq 1.$$

Így

$$F = \iint_T dx\, dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx\, dy = \int^1 (\sqrt{y} - y^2)\, dy =$$

$$\left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Határozzuk meg annak a hengerszerű testnek a térfogatát, amelyet a $z = 1 - 9x^2 - 4y^2$ felület és az (x, y) sík határol (23. ábra).

A test térfogata:

$$V = \iint_T z\, dx\, dy,$$

ahol T-t az elliptikus paraboloidnak és az x, y síknak

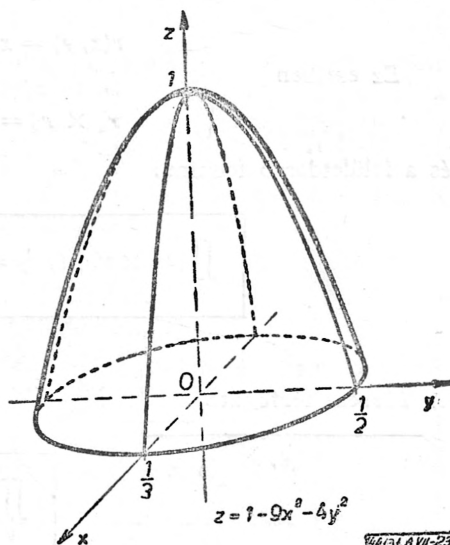
$$9x^2 - 4y^2 = 1$$

egyenletű elipszis metszete határolja.

A T tartományt derékszögű négyszöggé transzformáljuk, az

$$x = \frac{1}{3} u \cos v,$$

$$y = \frac{1}{2} u \sin v$$



23. ábra

függvényrendszer közvetítésével új változókat vezetve be.

Mivel

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{3}\cos v,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{3}u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}\sin v,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}u\cos v,$$

azért

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\cos v & -\frac{1}{3}u\sin v\\ \frac{1}{2}\sin v & \frac{1}{2}u\cos v\end{vmatrix}=\frac{1}{6}u\cos^2 v+\frac{1}{6}u\sin^2 v=\frac{1}{6}u.$$

A T' tartomány határai:

$$0\leqq u\leqq 1,$$

$$0\leqq v\leqq 2\pi.$$

Az integrálandó függvény:

$$z(u,v)=1-9\left(\frac{1}{3}u\cos v\right)^2-4\left(\frac{1}{2}u\sin v\right)^2=1-u^2.$$

Így a keresett térfogat:

$$V=\iint_T(1-9x^2-4y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{6}\iint_{T'}(1-u^2)\,u\,du\,dv=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1(u-u^3)\,du\,dv=$$

$$=\frac{1}{6}2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}\pi.$$

3. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, melyet az $x^2+y^2+z^2\leqq R^2$ gömbből az $x^2-Rx+y^2=0$ hengerfelület kivág. Ez az ú. n. *Viviani-féle test* (24. ábra).

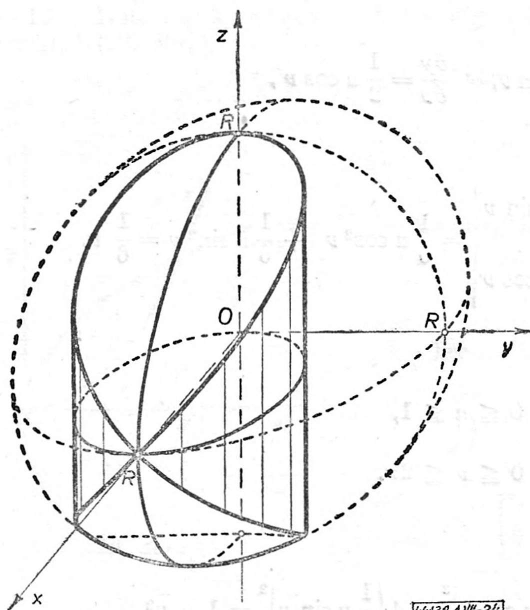
Miután a gömbfelület egyenletéből (a felső félgömbre szorítkozva)

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

a Viviani-féle test negyedrészének köbtartalma:

$$\frac{K}{4}=\iint_T\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

ahol a T tartomány az $x^2 + y^2 - Rx \leqq 0, x > 0, y > 0$ félkör. Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ helyettesítéssel az integrál a



24. ábra.

$$\frac{K}{4} = \iint_{T'} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi$$

alakot ölti, ahol is az integráció tartománya

$$T': \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},$$
$$0 \leqq r \leqq R\cos\varphi .$$

Tehát

$$\frac{K}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R\cos\varphi} (-2r)(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3} \int^{\frac{\pi}{2}} \left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R\cos\varphi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right),$$

vagyis a Viviani-féle test köbtartalma:

$$K = \frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Az (y, z) sík előtti félgömb tartalmazza a Viviani-féle testet. Ezt belőle elhagyva, a maradék test köbtartalma:

$$\frac{2R^3\pi}{3} - \frac{2R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right) = \frac{8R^3}{9}.$$

Vagyis, ha a félgömbből a *Viviani*-féle testet elhagyjuk, a maradék test a gömb köré írt kocka kilencedrészével egyenlő köbtartalmú.

4. Számítsuk ki annak a testnek a köbtartalmát, amelyet az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipszoid határol (25. ábra).

Az ellipszoid egyenletéből

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

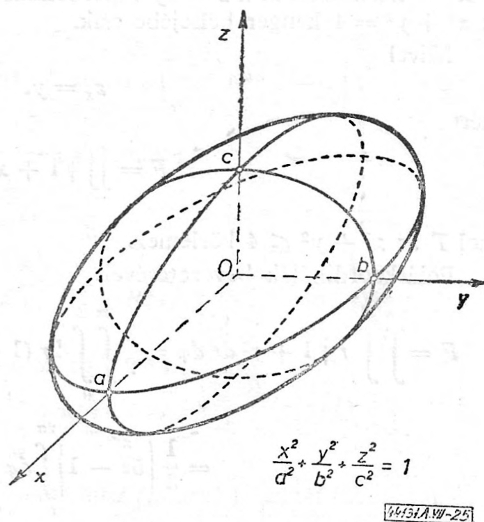
A test nyolcadának köbtartalma:

$$\frac{K}{8}=\iint_T c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

ahol T a

$$0\leqq x\leqq a,\quad 0\leqq y\leqq\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

negyedellipszis.



25. ábra

Új változókat vezetünk be az

$$x=au\cos v,$$
$$y=bu\sin v$$

függvényekkel.

Mivel

$$\frac{\partial x}{\partial u}=a\cos v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-au\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=b\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=bu\cos v,$$

azért

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}a\cos v & -au\sin v\\ b\sin v & bu\cos v\end{vmatrix}=abu.$$

Ezzel

$$\frac{K}{8}=c\iint_{T'}\sqrt{1-u^2}\cdot abu\,du\,dv,$$

ahol

$$T':\quad 0\leqq u\leqq 1,\quad 0\leqq v\leqq\frac{\pi}{2}.$$

Lesz tehát

$$\frac{K}{8}=-\frac{abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1(-2u)(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,du\,dv=-\frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1dv=$$

$$=\frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv=\frac{abc}{3}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Végeredményben:

$$K = \frac{4\,abc\,\pi}{3}.$$

5. Számítsuk ki a $z = xy$ hiperbolikus paraboloid azon darabjának felszínét, mely az $x^2 + y^2 = 4$ henger belsejébe esik.

Mivel

$$z'_x = y, \quad z'_y = x,$$

azért

$$F = \iint_T \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$

ahol T az $x^2 + y^2 \leqq 4$ körlemez.

Polárkoordináták bevezetésével:

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 2r\,(1 + r^2)^{\frac{1}{2}}\, dr\, d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

6. Tekintsük az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqq 0$, $y \geqq 0$ negyedgömb felületnek azt a részét, amelyet belőle az

$$x^2 - Rx + y^2 = 0$$

henger kivág. Határozzuk meg e *„Viviani-féle levél"* felszínét.

A gömb egyenletéből

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

ahonnan

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Ezekkel

$$F = \iint_T \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = R\iint_T \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

ahol a T tartomány az $x^2 - Rx + y^2 \leqq 0$, $x > 0$, $y > 0$ félkörlap.

Vezessünk be polárkoordinátákat. Ekkor

$$F = R\iint_{T'} \frac{r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

ahol T':

$$0 \leqq r \leqq R\cos\varphi,$$

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Lesz

$$F = -\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\varphi}(-2r)(R^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,dr\,d\varphi = -R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^{R\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= -R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi-1)\,d\varphi = R^2\Big[\varphi+\cos\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

A *Viviani*-féle levelet tartalmazó gömboktáns felszíne:

$$F_{\text{gömbokt}} = R^2\frac{\pi}{2}.$$

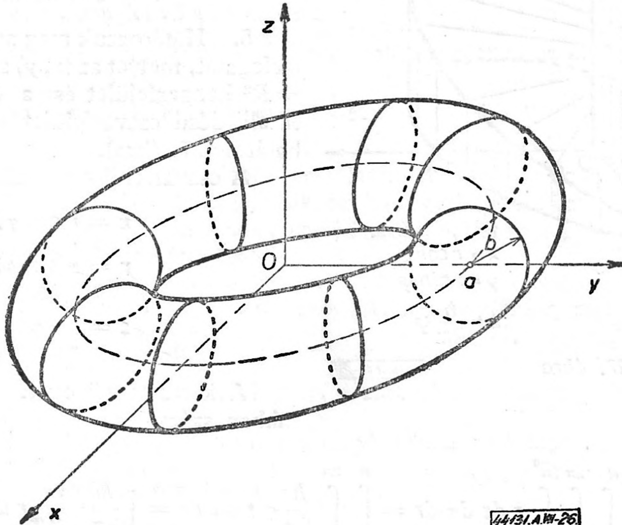
Így

$$F_{\text{gömbokt}} - F_{\text{Viviani}} = R^2.$$

7. Határozzuk meg az

$$x = (a + b\cos u)\cos v,$$
$$y = (a + b\cos u)\sin v, \qquad (a > b)$$
$$z = b\sin u$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott *gyűrűfelület (tórusz)* felszínét (26. ábra).



26. ábra.

Kiszámítjuk a paraméterek szerinti parciális deriváltakat:

$$x'_u = -b\sin u\cos v, \qquad x'_v = -(a + b\cos u)\sin v,$$
$$y'_u = -b\sin u\sin v, \qquad y'_v = (a + b\cos u)\cos v,$$
$$z'_u = b\cos u, \qquad z'_v = 0.$$

Ezekkel:

$$E = b^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u = b^2,$$

$$F = b(a + b \cos u) \sin u \cos v \sin v - b(a + b \cos u) \sin u \cos v \sin v = 0,$$

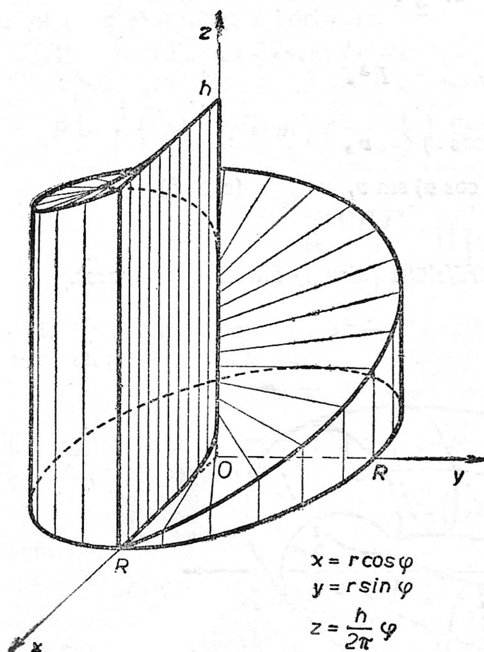
$$G = (a + b \cos u)^2.$$

Így

$$\sqrt{EG - F^2} = ab + b^2 \cos u.$$

A felület felszíne tehát:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (ab + b^2 \cos u)\, du\, dv = 4ab\, \pi^2.$$



27. ábra

Megjegyzendő, hogy ugyanez az eredmény adódik egyszerűbben, a mechanikából is ismert *Guldin-féle tétel* alapján.* Eszerint valamely, forgásfelület felszínét megkapjuk, ha a meridiángörbe ívhosszát megszorozzuk a meridiángörbe ívének súlypontja által megtett úttal.

A mi esetünkben a meridiángörbe ívhossza: $s = 2b\pi$.

A súlypont útja: $l = 2a\pi$.

Így a felszín:

$$F = s \cdot l = 4ab\, \pi^2.$$

8. Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, melyet az (x, y) sík, az $x^2 + y^2 = R^2$ hengerfelület és a z tengelyű, h emelkedésű csavarfelület egy csavarulata határol (27. ábra).

A csavarfelület egyenlete:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = \frac{h}{2\pi} \varphi.$$

A keresett térfogat, hengerkoordinátákban számolva:

$$K = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{h}{2\pi}\varphi} r\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{h}{2\pi} \varphi\, r\, d\varphi\, dr = \int_0^R \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{2} r\, dr =$$

$$= h\pi \int_0^R r\, dr = \frac{1}{2} R^2 \pi h.$$

A test térfogata épp fele a burkoló henger térfogatának.

* L. az A. V.** kötet 7. §-ában.

Feladatok

a) Síkrész területe

Az alábbi feladatokban határozzuk meg az adott T síkrész területének mérőszámát. A feladatok legnagyobb részében célszerű új változókat bevezetni!

1. T az $r = \frac{1}{1-\cos\varphi}$ parabola és a $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ egyenesek által határolt zárt síkrész.

2. T az $r = e^{\varphi}$ logaritmikus spirális és a $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ egyenesek által bezárt, az első negyedben fekvő zárt síkrész.

3. T az $r^2 = \cos 2\varphi$ lemniszkáta által határolt zárt síkrész.

4. T az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ asztroid által határolt zárt síkrész.

5. T az $x^3 + y^3 = 3xy$ Descartes-féle levél által határolt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

6. T az $(x^2 + y^2)^3 = 64x^2y^2$ görbe által határolt zárt síkrész.

7. T az $x^4 + y^4 = 8xy^2$ görbe által határolt zárt síkrész.

8. T az $x^4 + y^4 = 2xy$ görbe által határolt zárt síkrész.

9. T az $x + y = 1$, $x + y = 3$, valamint az $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ egyenesek által bezárt és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

10. T az $y = 2x - x^2$, $y = 4x - 2x^2$ parabolák között és az első negyedben fekvő zárt síkrész.

További feladatok: 4. §. Feladatok *a)* 2—6.

b) Hengerszerű test térfogata

Az alábbi feladatokban határozzuk meg az (x, y) sík T síkrésze, e síkrész határgörbéjére állított z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerpalást és a $z = f(x, y)$ felület által határolt zárt térrész térfogatát.

1. $z = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$; T az a háromszög alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a $(0, 0)$, $(-2,3)$, $(-3,0)$ pontok.

2. $z = x^2 + y^2$; T az $(x + 1)^2 + y^2 \leqq 1$ zárt körtartomány.

3. $z = 1 + \frac{1}{2}x - y$; T az adott sík (x, y) síkkal való metszésvonala és az $y = x^2 - 4$ parabola által bezárt síkrész.

4. $z = xy$; T az a háromszög alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a $(0,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ pontok.

5. $z = 1 - x$; T az adott sík (x, y) síkkal való metszésvonala és az $y^2 = x$ parabola által bezárt síkrész.

6. $z = \sin^2 x - y^2$; T az adott felület (x, y) síkkal való metszésvonala által határolt, $x = 0$ és $x = \pi$ között lévő zárt síkrész.

7. $z = y^2 - 2x$; T az adott felület (x, y) síkkal való metszésvonala és az $x = 1$ egyenes által határolt zárt síkrész.

8. $z = 4 + y - x^2$; T az első negyedben fekvő és az $y = x^2$, $y^2 = x$ parabolák által határolt zárt síkrész.

9. $z = x^2 - y^2$; T az a háromszög alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a (0,0), (− 2,2), (− 2, − 2) pontok.

10. $x + z = 1$; T az adott sík (x, y) síkkal való metszésvonala és az $y^2 - 2x = 4$ parabola által határolt zárt síkrész.

11. $z = \frac{5}{2} - y^2$; T az a négyzet alakú zárt síkrész, melynek csúcspontai az (1,0), (0,1), (− 1,0), (0, − 1) pontok.

12. $z = 4 - y^2$; T az a véges zárt síkrész, mely az $y = x^2 - 2$ és az $y = 2 - x^2$ parabolák között fekszik.

13. $z = 3 - y$; T az az első negyedben fekvő negyedkör alakú zárt síkrész, mely az origó köré rajzolt $r = 2$ sugarú körív és a koordinátatengelyek között fekszik.

14. $z = x^2 - y^2$; T az a negyedkör alakú zárt síkrész, mely az $r = 2$ körív és a $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ félsugarak között fekszik.

15. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; T az az első negyedben fekvő negyedkör alakú zárt síkrész, melyet az $r = 1$ körív és a koordiánatengelyek határolnak.

16. $z = 2 - x^2$; T az $x^2 + y^2 \leqq 1$ zárt körtartomány.

17. $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$; T az $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4}$ zárt körtartomány.

18. $z = 2 - x$; T az adott sík (x, y) síkkal való metszésvonala és az $y^2 = 2x$ parabola által határolt zárt síkrész.

19. $z = \frac{1}{3y + x + 4}$; T az a háromszög alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a (0,0), (0, −1), (1,0) pontok.

20. $z = 2x - 3y^2$; T az a háromszög alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a (0,0), (2,0), (0,2) pontok.

c) Felületdarab felszíne

Az alábbi feladatokban határozzuk meg a $z = f(x, y)$, vagy $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ paraméteres alakban megadott felület azon darabjának a felszínét, melynek az (x, y) síkon való merőleges vetülete az adott T zárt síktartomány.

1. $z^2 = 2xy$; T az a derékszögű négyszög alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a (0,0), (− 4,0), (−4, −2), (0, −2) pontok.

2. $z^2 = 4x^3$; T az a négyzet alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a (0,0), (2,0), (2,2), (0,2) pontok.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; T az $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$ zárt körtartomány ($z \geqq 0$).

4. $z^2 = x^2 - y^2$; T az a trapéz alakú zárt síkrész, melynek csúcspontjai a (3,3), (1,1), (1, −1), (3, −3) pontok ($z \geqq 0$).

5. $z = 2x^2 + 2y^2$; T az a nyolcadkör alakú zárt síkrész, mely az $r = 1$ körív és a $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ félsugarak közé esik.

6. $z = xy$; T az $x^2 + y^2 \leqq 4$ zárt körtartomány.

7. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = \operatorname{ch} u$; T az $x^2 + y^2 \leqq 1$ zárt körtartomány.

8. $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; T az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ zárt ellipszis alakú tartomány (a és b zérustól különböző állandók).

9. $x^2 + y^2 = z^2 \frac{a^2}{h^2}$; T az $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{a}{2}\right)^2$ zárt körtartomány ($z \geqq 0$; a és h zérustól különböző állandók).

10. $xy = az$; T az $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ görbe által határolt zárt síkrész (a zérustól különböző állandó).

11. $y^2 + z^2 = z^2$; T az $x^2 + y^2 \leqq R^2$ zárt körtartomány.

d) **Térrész térfogatának meghatározása hármas integrállal**

1. Határozzuk meg annak az (x, y) sík fölött fekvő zárt térrésznek a térfogatát, mely a $z = 4 - x^2 - y^2$ és $z = 2x^2 + 2y^2 - 8$ forgási paraboloidok között fekszik.

2. Határozzuk meg annak az első térnyolcadban fekvő tetraéder alakú testnek a térfogatát, mely a három koordinátasík és az $x + y + z = 1$ sík között fekszik.

3. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipszoid alakú testnek a térfogatát (a, b és c zérustól különböző állandók).

4. Határozzuk meg az r, φ, z hengerkoordinátákban megadott $9r^2 = z(3 - z)^2$ felület által bezárt térrész térfogatát, a $z = 0$ és $z = h$ határok között ($h > 0$).

5. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ egyenlettel megadott kúp térfogatát $z = 0$ és $z = c$ határok között (a, b és c zérustól különböző állandók).

További feladatok: 4. §. Feladatok, *b)* 1—5.

6. §. Fizikai alkalmazások

a) **Tömegközéppont (súlypont) meghatározása**

A mérhető T tartományt $\varrho(P)$ sűrűséggel (fajsúllyal) betöltő tömegeloszlás tömegközéppontjának (súlypontjának) koordinátái:

$$x_s = \frac{\int\limits_T x\,\varrho(P)\,dT}{\int\limits_T \varrho(P)\,dT}; \quad y_s = \frac{\int\limits_T y\,\varrho(P)\,dT}{\int\limits_T \varrho(P)\,dT}; \quad z_s = \frac{\int\limits_T z\,\varrho(P)\,dT}{\int\limits_T \varrho(P)\,dT}.$$

E törtek nevezőiben szereplő

$$\int\limits_T \varrho(P)\,dT$$

tartományintegrál adja *az egész rendszer tömegét (súlyát).*

A törtek számlálóiban szereplő tartományintegrálok a tömegrendszernek az egyes koordinátasíkokra vonatkozó *elsőrendű* (vagy *statikai*) *nyomatékai.*

b) **Tehetetlenségi (másodrendű) nyomaték**

A P_i pontban fekvő m_i tömegpontnak, a tőle r_i távolságra fekvő tengelyre (vagy pontra) vonatkozó tehetetlenségi (másodrendű) nyomatéka:

$$m_i\,r_i^2.$$

Ennek alapján a T tartományt $\varrho(P)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás esetén a tehetetlenségi nyomaték:

$$\int\limits_T r^2(P)\cdot\varrho(P)\,dT.$$

Síkbeli, ϱ sűrűségű tömegeloszlás esetén, ha az x, y koordinátarendszert a tömegeloszlás síkjában választjuk, akkor az egyes koordinátatengelyekre vonatkozó ú. n. *axiális másodrendű nyomaték:*

$$I_x = \iint_T \varrho y^2\, dx\, dy,$$

$$I_y = \iint_T \varrho x^2\, dx\, dy.$$

Az origóra vonatkozó ú. n. *poláris másodrendű nyomaték:*

$$I_p = \iint_T \varrho(x^2 + y^2)\, dx\, dy = I_x + I_y.$$

Az x, y tengelyekre vonatkozó ú. n. *centrifugális másodrendű nyomaték:*

$$I_c = \iint_T \varrho\, xy\, dx\, dy.$$

Ha ismeretes a tömegközépponton (súlyponton) átmenő, valamilyen irányú tengelyre vonatkozó I_s axiális másodrendű nyomaték, akkor a *Steiner-tétel* szerint egy ettől a tengelytől d távolságra fekvő és vele párhuzamos másik tengelyre vonatkozó axiális másodrendű nyomaték:

$$I = I_s + Md^2,$$

ahol M az egész rendszer tömegét jelenti.

Ha ismeretes a tömegközépponton átmenő, tengelykeresztre vonatkozó I_{sc} centrifugális másodrendű nyomaték, akkor egy másik, az előbbivel párhuzamos tengelykeresztre vonatkozó centrifugális másodrendű nyomaték:

$$I_c = I_{sc} + Mx_s\, y_s\,,$$

ahol M az egész rendszer tömegét, x_s és y_s pedig a tömegközéppontnak a szóbanforgó új tengelyekre vonatkoztatott koordinátáit jelentik.

Térbeli, ϱ sűrűségű *tömegeloszlás esetén* az egyes koordinátatengelyekre vonatkozó *axiális tehetetlenségi nyomatékok:*

$$I_{xx} = \iiint_V \varrho\,(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yy} = \iiint_V \varrho\,(x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zz} = \iiint_V \varrho\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Az ú. n. *deviációs nyomatékok:*

$$I_{xy} = \iiint_V \varrho\,xy\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V \varrho\,yz\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{xz} = \iiint_V \varrho\,xz\,dx\,dy\,dz.$$

Az origóra vonatkozó *poláris tehetetlenségi nyomaték:*

$$I_p = \iiint_V \varrho\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}).$$

Térbeli tömegeloszlás tetszés szerinti tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai és az ezekkel párhuzamos, tömegközépponton átmenő tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai között is érvényes, a síkbeli tömegeloszlásnál említett, *Steiner-tétel* szerinti összefüggés.

Az

$$I_{xx}\,x^2 + I_{yy}\,y^2 + I_{zz}\,z^2 - 2\,(I_{xy}\,xy + I_{yz}\,yz + I_{xz}\,xz) = 1$$

egyenletű másodrendű felület (az egyes együtthatók a fentebb értelmezett tehetetlenségi illetőleg deviációs nyomatékok) az ú. n. *tehetetlenségi ellipszoid.* Ennek az ellipszoidnak a főtengelyei az ú. n. *főtehetetlenségi irányokba* mutatnak, középpontja pedig a koordinátarendszer kezdőpontja. Ha a koordinátarendszert a kezdőpont körül úgy forgatjuk el, hogy a koordinátatengelyek az ellipszoid főtengelyeivel egybeessenek, akkor ebben a koordinátarendszerben az ellipszoid egyenlete nem fog tartalmazni vegyes másodfokú tagokat. Vagyis ezekre a tengelyekre vonatkozólag a rendszer deviációs nyomatékai zérusok. A főtehetetlenségi irányokra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok, az ú. n. *főtehetetlenségi nyomatékok* szélsőértékek. (Ezek megkeresése pl. adott esetben az A. VI. kötet 61. oldalán található 3. példa mintájára történhet.)

Ha a koordinátarendszer O kezdőpontján át húzunk egy g egyenest, és megkeressük ennek az egyenesnek a tehetetlenségi ellipszoiddal való egyik M metszéspontját, akkor az OM távolság megadja a g-re vonatkozó tehetetlenségi nyomaték reciprok négyzetgyökét.

c) Tömegeloszlás potenciálja

A $P_i(x_i, y_i, z_i)$ pontban fekvő m_i tömegpont *(Newton-féle) potenciáljának* értéke, a tőle r_i távolságra lévő $R(\xi, \eta, \zeta)$ pontban:

$$\Phi_i = \frac{m_i}{r_i};$$

az $m_1, m_2, \ldots, m_i \ldots, m_n$ pontrendszeré:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}.$$

Ennek alapján, a T tartományt $\varrho(P)$ sűrűséggel betöltő tömegeloszlás (Newton-féle) potenciálja az R pontban:

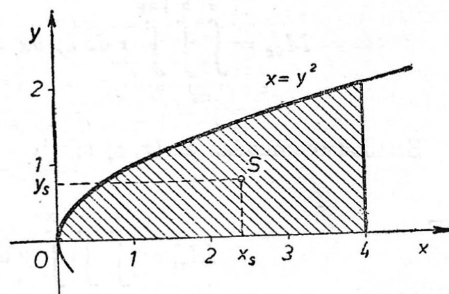
$$\Phi = \int_T \frac{\varrho(P)}{r}\, dT.$$

Térben pl.:

$$\Phi = \iiint_V \frac{\varrho(x, y, z)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Példák

1. Határozzuk meg az $x = y^2$, $y = 0$, $x = 4$ vonalakkal határolt homogén síklemez súlypontjának koordinátáit (28. ábra).



28. ábra

A lemez területe:

$$T = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}.$$

A lemez statikai nyomatéka az x tengelyre:

$$M_x = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\, dx = \frac{1}{4}\left[x^2\right]_0^4 = 4.$$

A lemez statikai nyomatéka az y tengelyre:

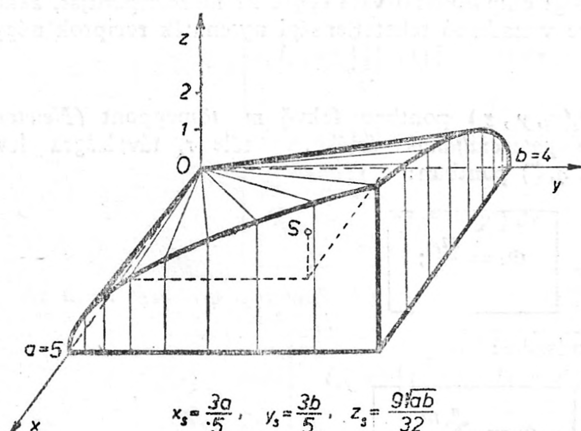
$$M_y = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{64}{5}.$$

Így a súlypont koordinátái:

$$x_s = \frac{M_y}{T} = \frac{12}{5};$$

$$y_s = \frac{M_x}{T} = \frac{3}{4}.$$



29. ábra

2. Határozzuk meg a $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$ felületekkel határolt homogén test súlypontjának koordinátáit (29. ábra).

A test térfogata:

$$K = \int_0^a \int_0^b \int_0^{\sqrt{xy}} dz\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b \sqrt{xy}\,dy\,dx = \frac{4}{9}\sqrt{a^3 b^3}.$$

Statikai nyomatéka az (y, z) síkra:

$$M_{yz} = \int_0^a \int_0^b \int_0^{\sqrt{xy}} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^b x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}}\,dy\,dx = \frac{4}{15}\sqrt{a^5 b^3}$$

Statikai nyomatéka az (x, z) síkra:

$$M_{xz} = \int_0^a \int_0^b \int_0^{\sqrt{xy}} y\,dz\,dy\,dx = \frac{4}{15}\sqrt{a^3 b^5}.$$

Statikai nyomatéka az (x, y) síkra:

$$M_{xy} = \int_0^a \int_0^b \int_0^{\sqrt{xy}} z\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b xy\,dy\,dx = \frac{a^2 b^2}{8}.$$

Ezekkel a súlypont koordinátái:

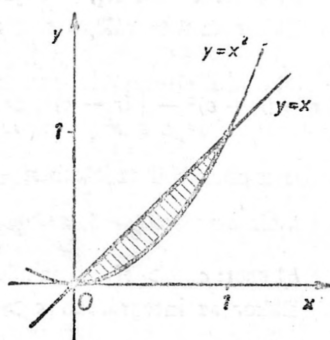
$$x_s = \frac{3a}{5}; \quad y_s = \frac{3b}{5}; \quad z = \frac{9\sqrt{ab}}{32}.$$

3. Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola és az $y = x$ egyenessel bezárt homogén síklemez poláris másodrendű nyomatékát az origóra (30. ábra).

$$I_p = \iint_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right) dx = \left[\frac{4}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{3}{35}.$$

4. Számítsuk ki a ϱ sűrűségű, R_1 belső és R_2 külső sugárral bíró homogén gömbhéj potenciálját egy a középpontjától c távolságban fekvő pontban, amely nem tartozik a gömbhéjhoz.



30. ábra

Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy az origó a gömb középpontja, az adott pont a z tengely $(0, 0, c)$ pontja legyen. Ekkor a Φ potenciál:

$$\Phi = \varrho \iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}},$$

ahol a V térrész az adott sugarú gömbfelületekkel határolt gömbhéj.

Vezessük be az

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \; y = r\cos\varphi\sin\vartheta, \; z = r\sin\varphi$$

függvényekkel az r, φ és ϑ gömbkoordinátákat. Ekkor

$$\Phi = \varrho \iiint_{V'} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - c)^2}}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

ahol a V' tartomány határai:

$$R_1 \leqq r \leqq R_2, \; 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi, \; -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Vagyis háromszoros integrál alakjában:

$$\Phi = \varrho \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{r^2 - 2cr\sin\varphi + c^2}}\,d\varphi\,dr\,d\vartheta.$$

Itt a belső integrál:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos\varphi}{\sqrt{r^2 - 2cr\sin\varphi + c^2}}\, d\varphi = \left[-\frac{r}{c}\sqrt{r^2 - 2cr\sin\varphi + c^2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r}{c}\left(\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}\right),$$

tehát

$$\Phi = \frac{2\pi\varrho}{c}\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left(\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}\right) dr.$$

Most már két esetet kell megkülönböztetni:

a) eset: $c < R_1$, az adott pont a belső gömbön belül van.
Ekkor az integrálban $c < r$, tehát

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left(\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}\right) dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} r[(r+c)-(r-c)]\, dr = 2c\int\limits_{R_1}^{R_2} r\, dr = c\,(R_2^2 - R_1^2),$$

vagyis a potenciál ez esetben

$$\Phi = 2\pi\varrho(R_2^2 - R_1^2) = \text{állandó}.$$

b) eset: $c > R_2$, az adott pont a külső gömbön kívül van.
Ekkor az integrálban $c > r$, tehát

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} r\left(\sqrt{(r+c)^2} - \sqrt{(r-c)^2}\right) dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} r[(r+c)-(c-r)]\, dr = 2\int\limits_{R_1}^{R_2} r^2\, dr = \frac{2}{3}(R_2^3 - R_1^3),$$

azaz a potenciál

$$\Phi = \frac{4\pi\varrho}{3c}(R_2^3 - R_1^3).$$

Minthogy egy R sugarú gömb köbtartalma $\frac{4R^3\pi}{3}$, a szóbanforgó gömbhéj tömege: $M = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\,\varrho$, tehát ez utóbbi esetben a keresett potenciál: $\Phi = \frac{M}{c}$, vagyis ugyanaz, mintha a gömbhéj egész tömege a középpontjában volna egyesítve.

Feladatok

a) Síklemez tömegközéppontjának meghatározása

Az alábbi feladatokban állandó vastagságú és (egyszerűség kedvéért) $\varrho = 1$ állandó sűrűségű homogén síklemezek tömegközéppontjának koordinátáit kell meghatároznunk. T jelenti azt a zárt síkrészt, mely a lemez alakját megszabja.

1. T az $y = px^2$ parabola és az $y = b$ egyenes által bezárt síkrész.

2. T az $y = \sin x$ függvény görbéjének az első negyedben fekvő első félhulláma alatti terület.

3. T az az első negyedben fekvő, trapéz alakú zárt tartomány, amelyet az $y = 0$, $y = 2$, $y = 4 - 2x$, $x = 0$ egyenesek határolnak.

4. T az az $x \geq 0$ félsíkban fekvő, háromszög alakú zárt tartomány, amelyet az $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$, $x = 0$ egyenesek határolnak.

5. T az az első negyedben fekvő, parabolaszelet alakú zárt tartomány, amelyet az $y = 1 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}x^2$ parabola és az $y = 1 - \frac{1}{2}x$ egyenes határol.

6. T az a négyszög alakú tartomány, amelynek csúcspontjai a (4,4), (5,7), (10,10) és (12,4) pontok.

7. T az AB egyenesre ($A : x = R, y = 0$; $B : x = -R, y = 0$) szerkesztett R és r sugarú koncentrikus félkörök közti terület.

8. T az origó körül rajzolt R sugarú körnek az első negyedben lévő része elhagyásával adódó háromnegyedkör alakú síkrész.

9. Mutassuk ki, hogy a körszelet alakú síklemez tömegközéppontja a kör középpontjától $\frac{l^3}{12f}$ távolságra van, ahol l a szelet húrjának hossza, f pedig a szelet területe.

10. R sugarú félkörből és $2R$ alapú, h magasságú derékszögű négyszögből síklemezt állítunk össze. Mekkora $\frac{h}{R}$ arány esetén esik egybe a síklemez tömegközéppontja a félkör középpontjával?

b) Test tömegközéppontjának meghatározása

1. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2 - \frac{1}{2}x$, $z = 0$ felületekkel határolt zárt homogén, egységnyi sűrűségű hengerrész tömegközéppontjának koordinátáit.

2. Határozzuk meg az (x, y) síkon álló és fölötte elhelyezkedő R sugarú, homogén félgömb tömegközéppontjának koordinátáit.

3. Határozzuk meg a homogén sűrűségű csonkakúp tömegközéppontjának az alaplaptól mért távolságát, ha az alap- és fedőlap körsugara R és r, a magasság pedig h.

4. R sugarú, homogén sűrűségű gömb O középpontjában három egymásra merőleges koordinátasíkot veszünk fel. Határozzuk meg a síkok által kimetszett nyolcadgömb tömegközéppontjának koordinátáit és az O ponttól mért r_s távolságát.

5. Mekkorának kell lennie a homogén sűrűségű R sugarú gömbcikk h szeletmagasságának, hogy a gömbcikk tömegközéppontjának távolsága a gömb középpontjától $\frac{R}{n}$ legyen?

c) Síklemezek másodrendű nyomatéka

Az alábbi feladatokban állandó vastagságú és (egyszerűség kevéért) $\varrho = 1$ állandó sűrűségű homogén síklemezek axiális, poláris és centrifugális másodrendű nyomatékát kell meghatároznunk (a koordinátatengelyekre, illetve az origóra vonatkozólag). T jelenti azt a zárt síkrészt, mely a lemez alakját megszabja.

1. T az a derékszögű négyszöglap, melynek középpontja az origóban van, a oldala az x tengellyel, b oldala az y tengellyel párhuzamos.

2. T az az a oldalú négyzetlap, melynek két átlója egybeesik a koordinátatengelyekkel.

3. T az az a alapú és m magasságú háromszöglap, melynek tömegközéppontja egybeesik az origóval és alapja párhuzamos az x tengellyel.

4. T az az a és b hosszúságú ($a > b$) párhuzamos oldalakkal bíró, m magasságú trapézlap, melynek tömegközéppontja egybeesik az origóval és párhuzamos oldalainak iránya az x tengelyével megegyezik.

5. T az az R sugarú körbe írt szabályos hatszöglap, melynek középpontja egybeesik az origóval és egyik oldalfelező merőlegese egybeesik az x tengellyel.

6. T az az R sugarú körbe írt szabályos hatszöglap, melynek középpontja egybeesik az origóval és egyik, $2R$ hosszúságú átlója egybeesik az x tengellyel.

7. T a d átmérőjű, origó középpontú körlap.

8. T az az R sugarú félkörlap, melynek tömegközéppontja egybeesik az origóval és szimmetriatengelye egybeesik az y tengellyel.

9. Mekkora az M tömegű háromszöglap másodrendű nyomatéka egyik oldalára, ha m az illető oldalhoz tartozó magasság?

10. M tömegű trapézlap párhuzamos oldalai a és b, magassága m nagyságú. Számítsuk ki az a oldalra vonatkozó másodrendű nyomatékot.

11. M tömegű egyenlőszárú háromszöglap alapja a, magassága m nagyságú. Számítsuk ki másodrendű nyomatékát az alappal szembenfekvő csúcspontjára.

12. Mekkora az M tömegű, ellipszisalakú lap másodrendű nyomatéka a $2a$ és $2b$ nagyságú főtengelyeire és O középpontjára?

d) **Testek tehetetlenségi nyomatéka**

1. Számítsuk ki az M tömegű derékszögű hasáb alakú homogén test tehetetlenségi nyomatékát, a, b és c hosszúságú éleire és O középpontjára.

2. Határozzuk meg az M tömegű, R sugarú, gömb alakú homogén test tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő, tetszőleges irányú tengelyre és a középpontjára vonatkozólag.

3. Határozzuk meg az M tömegű, r sugarú és m magasságú körhenger alakú homogén test tehetetlenségi nyomatékát a henger szimmetriatengelyére és a súlyponton átmenő, alapjával párhuzamos tetszőleges tengelyre.

4. Határozzuk meg az M tömegű, r alapkör-sugarú és m magasságú körkúp alakú homogén test tehetetlenségi nyomatékát a geometriai tengelyére és alapjának tetszőleges átmérőjére.

5. Határozzuk meg az M tömegű, m magasságú és r alapkör-sugarú forgási paraboloid alakú homogén test tehetetlenségi nyomatékát geometriai tengelyére.

6. Határozzuk meg az a, b és c féltengelyhosszakkal rendelkező, M tömegű, ellipszoid alakú homogén test tehetetlenségi nyomatékát főtengelyeire és O középpontjára.

7. Ha az r sugarú kört a síkjában fekvő és középpontjától R távolságra ($R > r$) lévő z tengely körül megforgatjuk, gyűrűtestet (tóruszt) kapunk. Számítsuk ki e homogén gyűrűtest tehetetlenségi nyomatékát a z tengelyre, ha tömege M.

8. Állítsuk fel egy M tömegű, a élhosszúságú homogén kocka egyik csúcspontjára vonatkozó tehetetlenségi ellipszoidjának egyenletét olyan derékszögű koordinátarendszerben, melynek kezdőpontja a kiválasztott csúcs és tengelyei párhuzamosak a kocka éleivel.

e) Tömegeloszlás potenciálja

1. Határozzuk meg az elhanyagolható vastagságú, $\varrho =$ állandó sűrűségű $x^2 + y^2 \leqq R^2$ homogén körlap Newton-féle potenciálját a $P(0, 0, z)$ pontban.

2. Határozzuk meg az elhanyagolható vastagságú, $\varrho =$ állandó sűrűségű $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ homogén ellipszislap Newton-féle potenciálját a $P(0, 0, z)$ pontban (a és b zérustól különböző állandók).

3. Határozzuk meg a $\varrho =$ állandó sűrűségű, $R_1^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq R_2^2$, $-a \leqq z \leqq a$ homogén hengergyűrű Newton-féle potenciálját a $P(0, 0, z)$ pontban.

7. §. Vonalintegrálok

a) Ívhossz szerinti integrál

Legyen $f(P)$ a rektifikálható L görbe mentén értelmezett egyértékű, folytonos függvény. P a görbe futó pontját jelenti. Jelölje továbbá s a görbe egy rögzített P pontjától mért ívhosszt a P futópontig. A függvény ívhossz szerinti integrálja:

$$\lim_{\mathrm{Max}\,\Delta s_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta s_i = \int_L f(P)\,ds.$$

Ha a görbe az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor

$$\int_L f(P)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt.$$

Síkgörbe esetén, ha a görbe egyenlete $y = y(x)$, akkor

$$\int_L f(P)\,ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx.$$

b) Vonalintegrál

Legyenek

$$p(x, y, z), \quad q(x, y, z), \quad r(x, y, z)$$

folytonos függvények és L valamely rektifikálható irányított folytonos vonaldarab. Az

$$\int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

integrált az irányított L görbe mentén vett vonalintegrálnak nevezzük.

Ha a görbe az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ paraméteres egyenletrendszerrel van megadva, akkor

$$\int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int_{t_1}^{t_2} [p(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t) + q(x(t), y(t), z(t))\,\dot{y}(t) + r(x(t), y(t), z(t))\,\dot{z}(t)]\,dt.$$

A határokat az integrálás útjának megfelelően kell megválasztanunk: t_1 a görbe kezdőpontjának, t_2 a végpontnak megfelelő paraméterérték.

Ha $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ és $r(x, y, z)$ a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektor-vektor függvény koordinátái, azaz

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

továbbá a térgörbét az

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$

egyparaméteres vektor-skalár függvénnyel adjuk meg, akkor a görbementi integrál így írható:

$$\int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int_L \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt.$$

c) Zárt görbe menti integrál

Az L görbe befutási irányát ellenkezőre változtatva, az integrál értéke előjelet vált:

$$\int_{+L} (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = -\int_{-L} (p\,dx + q\,dy + r\,dz).$$

Ha az L görbe a végesszámú $L_1, L_2, \ldots, L_n$ szakaszokból van összerakva úgy, hogy $L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L$, akkor

$$\int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int_{L_1} (p\,dx + q\,dy + r\,dz) + \ldots + \int_{L_n} (p\,dx + q\,dy + r\,dz).$$

Az L_1 és L_2 görbeszakaszokat ha úgy fűzzük egymáshoz, hogy az L_2 végpontja egybeesik az L_1 kezdőpontjával, akkor zárt görbét kapunk. Zárt görbe menti integrálnál a befutási értelem pozitív (megállapodás szerint), ha az óramutató járásával ellentétes (csak síkgörbénél van értelme!)

A *zárt görbe menti integrál* szokásos jelölése:

$$\oint_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz).$$

d) Teljes differenciál integrálása

Az

$$\int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

vonalintegrál értéke független az integrálás útjától és csak a kezdő- és végponttól függ, ha van olyan $u = u(x, y, z)$ *háromváltozós függvény, melynek* $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ *teljes differenciálja*, azaz

$$du = p\,dx + q\,dy + r\,dz.$$

Ez fennáll akkor, ha (egyszeresen összefüggő tartományban)

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

(Integrálhatósági feltétel.)

Ez esetben bármely zárt görbe mentén

$$\oint_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = 0.*$$

Ha $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ teljes differenciál, egy *primitív függvény* (mely a kezdőpont megválasztásától függő integrációs állandót tartalmaz) vonalintegrállal határozható meg:

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} du = u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0).$$

e) Fizikai értelmezése

Ha $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$ valamely *erőtér* vektorának a koordinátái, akkor az

$$\int_L (p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

vonalintegrál az L görbe befutásakor végzett *munkát* adja meg.

Ha tehát az erőteret a

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

vektor-vektor függvény határozza meg, akkor az

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$$

függvénnyel megadott L görbe egy darabjának befutásakor végzett munka:

$$A = \int_L \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt.$$

Ha viszont $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ egy *áramló folyadék sebességi vektorterét* jelenti, akkor az

$$\oint \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \Gamma$$

az L zárt görbe menti ú. n. *cirkuláció*.

* Mindent vektorosan l. a B. III. kötetben.

f) Vektortér potenciálja*

Bizonyos vektorterekben bármely zárt görbe mentén vett vonalintegrál zérus, azaz a vonalintegrál értéke nem függ az úttól, csak a kezdő- és végponttól. Ez esetben *a vektortérnek van potenciálja.* Az $u(x, y, z)$ *potenciálfüggvény* a vektortér komponenseivel felírt $p\,dx + q\,dy + r\,dz$ teljes differenciál primitív függvénye, tehát vonalintegrállal meghatározható.

A potenciálfüggvényből a vektortér komponensei egyszerű differenciálással számíthatók:

$$p(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$q(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$r(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Vektoros írásmóddal, mivel

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

potenciálos vektortér esetén a vektortér előállítható a potenciálfüggvény gradienseként

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\, u.}$$

g) Green-formula**

Ha a síkbeli T tartományt az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ zárt görbék határolják, akkor

$$\iint [q'_x(x, y) - p'_y(x, y)]\, dx\, dy = \oint_{L_1} [p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy] +$$

$$+ \oint_{L_2} [p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy] + \ldots + \oint_{L_n} [p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy],$$

ahol $L_1, L_2, \ldots, L_n$ pozitív irányú befutásakor a T tartománynak balkéz felé kell esnie.

Ez a Green-formulának nevezett összefüggés speciális esete a *Gauss—Osztrogradszkij-féle* általános *tétel*nek. (9. §.)

h) Síkrész területe

Ha az említett képletben speciálisan

$$p(x, y) = -y \quad \text{és} \quad q(x, y) = x$$

akkor

$$\oint_{+L} (-y\, dx + x\, dy) = \iint_T (1 + 1)\, dx\, dy = 2 \iint_T dx\, dy.$$

* L. a B III. kötetben.
** L. még a B III kötetben.

Vagyis az L görbével határolt T tartomány területe:

$$\iint_T dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_{+L}(-y\,dx + x\,dy).$$

Minthogy pedig

$$\oint_{+L}(y\,dx + x\,dy) = 0,$$

$\left(\text{ugyanis } \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial x} \text{ és } L \text{ zárt görbe}\right)$, ezért területképletünket így is írhatjuk:

$$\iint_T dx\,dy = -\oint_{+L} y\,dx,$$

vagy

$$\iint_T dx\,dy = \oint_{+L} x\,dy.$$

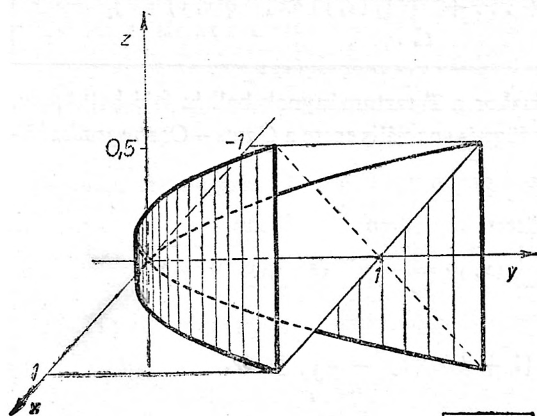
Ha a határoló görbe paraméteres előállítása:

$$x = x(t),\quad y = y(t),$$

$$t_1 \leqq t \leqq t_2,$$

akkor

$$\iint_T dx\,dy = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\dot{y}(t)\,dt.$$



13. ábra.

Példák

1. Az $y = x^2$ parabolikus hengert elmetsszük a $z = x$ síkkal. Határozzuk meg az (x, y) sík és a $z = x$ sík közti palástrész felszínét, $y = 0$, $y = 1$ síkok között (31. ábra).

A palást felszínét az

$$\int z\,ds$$

ívhossz szerinti integrállal számíthatjuk.

$$F = \int_L z\,ds = 2\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 8x\,(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\ .$$

2. Számítsuk ki az

$$x = e^{\frac{t}{3\pi}}\cos t,$$

$$y = e^{\frac{t}{3\pi}}\sin t,$$

$$z = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{3\pi}}$$

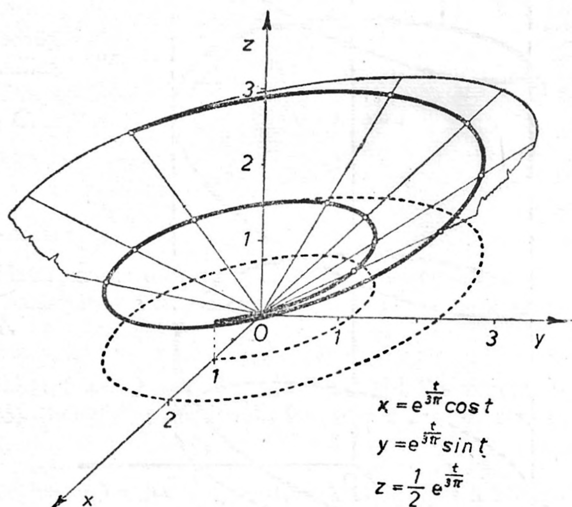
egyenletrendszerrel megadott, kúpra írt csavarvonal ívhosszát $t_1 = 0$-tól $t_2 = 3\pi$-ig (32. ábra).

A térgörbe ívhosszát az

$$s = \int ds =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

integrállal számítjuk.



32. ábra

Mivel

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3\pi}e^{\frac{t}{3\pi}}\cos t - e^{\frac{t}{3\pi}}\sin t\,,$$

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{3\pi}e^{\frac{t}{3\pi}}\sin t + e^{\frac{t}{3\pi}}\cos t\,,$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{6\pi}e^{\frac{t}{3\pi}}\,,$$

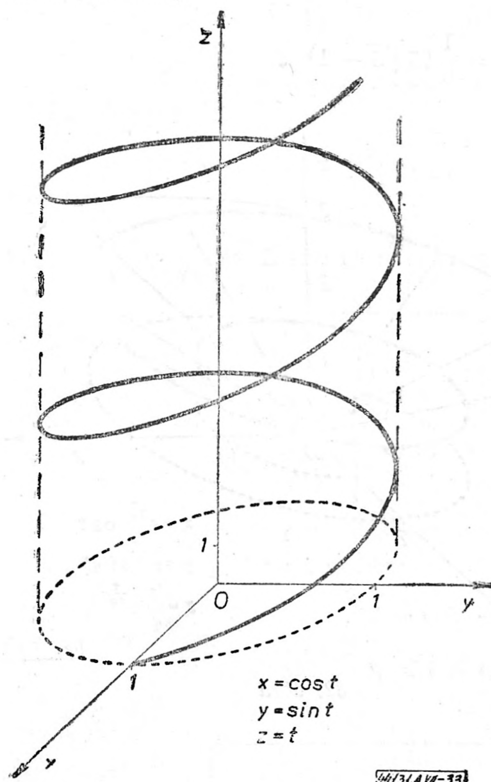
azért az integrálandó függvény:

$$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)} = \frac{\sqrt{5+36\pi^2}}{6\pi}e^{\frac{t}{3\pi}}\ .$$

A keresett ívhossz:

$$s = \frac{\sqrt{5+36\pi^2}}{6\pi}\int_0^{3\pi}e^{\frac{t}{3\pi}}\,dt \approx 15{,}9.$$

3. Számítsuk ki a $p = x - y$, $q = x + y$, $r = xyz$ koordinátájú vektorfüggvénnyel megadott erőtér által végzett munkát, az $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ csavarvonalnak $t_1 = 0$ és $t_2 = 2\pi$ paraméterértékekhez tartozó pontjai közti útszakasz befutásakor (33. ábra).



33. ábra

A végzett munkát az

$$A = \int (p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

görbementi integrál adja. Kiszámításához szükségünk van a következőkre:

$$\dot{x}(t) = -\sin t,$$

$$\dot{y}(t) = \cos t,$$

$$\dot{z}(t) = 1.$$

Így

$$A = \int_0^{\pi} [(\cos t - \sin t)(-\sin t) +$$

$$+ (\cos t + \sin t)\cos t + t \sin t \cos t\,]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} t \sin 2t\right) dt =$$

$$= \left[t + \frac{\sin 2t}{8} - \frac{t \cos 2t}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi - \frac{2\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

4. Állapítsuk meg, hogy az

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

kifejezés teljes differenciál-e, és ha igen, keressük meg egy primitív függvényét.

A szokásos jelöléseinkkel $p = yz$, $q = xz$, $r = xy$.

Az adott kifejezés teljes differenciál, mert

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial z} = x, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = z.$$

Így a primitív függvény:

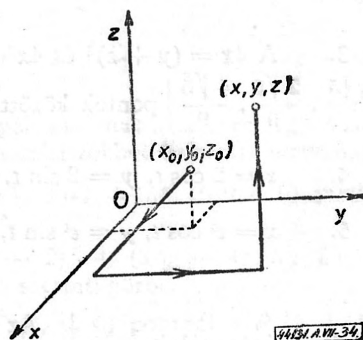
$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) + C.$$

A görbementi integrál kiszámítására az (x_0, y_0, z_0) pontot az (x, y, z) ponttal koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból összetett vonallal kötjük össze (34. ábra):

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} y_0 z_0\, dx + \int_{y_0}^{y} x z_0\, dy + \int_{z_0}^{z} xy\, dz =$$

$$= xy_0z_0 - x_0y_0z_0 + xyz_0 - xy_0z_0 + xyz - xyz_0 =$$

$$= xyz - x_0y_0z_0 = xyz + C.$$



34. ábra

Feladatok

a) Ívhossz szerinti integrál

1. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 4$ egyenes körhenger palástjának a felszínét a $z = 0$ és $z = 4 - x$ síkok között.

2. Határozzuk meg az (x, y) síkban fekvő $r = e^{\varphi}$ logaritmikus spirális vezérgörbéjű, z tengellyel párhuzamos alkotójú henger palástjának felszínét a $z = 0$, $z = y$, $y = 0$, $y = 0$ síkok között.

3. Számítsuk ki az R sugarú kör homogén íve súlypontjának távolságát a középponttól, 2φ középponti szög esetén.

4. Számítsuk ki az $r = R(1 + \cos \varphi)$ homogén kardioid teljes íve súlypontjának koordinátáit.

5. Számítsuk ki az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ homogén ciklois teljes íve súlypontjának koordinátáit.

6. Számítsuk ki az $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$, $0 \leqq t \leqq m$ homogén csavarvonalív súlypontjának koordinátáit.

7. Számítsuk ki az $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, $0 < t < \infty$ homogén görbeív súlypontjának koordinátáit.

b) Térgörbék ívhossza

Határozzuk meg az alábbi térgörbék ívhosszúságát az adott határok között. (Az első három példánál válasszunk alkalmas paramétert és ezzel állítsuk elő a térgörbe egyenletét!)

1. Az $x^2 = 3y$ és $2xy = 9z$ felületek metszésgörbéje a $P_1(0, 0, 0)$ és $P_2(3, 3, 2)$ pontok között.

2. A $z^2 = 2x$ és $9y^2 = 16xz$ felületek metszésgörbéje a $P_1\,(0, 0, 0)$ és $P_2\left(2, \frac{8}{3}, 2\right)$ pontok között.

3. A $4x = (y+z)^2$ és $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ felületek metszésgörbéje a $P_1(0, 0, 0,)$ és $P_2\left(\frac{5}{9}, \frac{2\sqrt{5}}{9}, \frac{4\sqrt{5}}{9}\right)$ pontok között.

4. $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2\ln \sin t;\quad \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

5. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t;\ 0 \leq t \leq 1$.

c) Vonalintegrálok

Az alábbi feladatokban adott

$$v(r) = p(x, y, z)\,i + q(x, y, z)\,j + r(x, y, z)\,k$$

vektortérnek adott L irányított vonaldarab menti integrálját kell meghatároznunk:

1. $v(r) = (x^2 + y^2)\,i + (y^2 - x^2)\,j;\qquad L: \frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1,\qquad 0 \leq x \leq 1$.

2. $v(r) = (x - y)\,i + xy\,j;\ L: x = 2t^2,\ y = 3t - 5,\ 0 \leq t \leq 2$.

3. $v(r) = x^2 i - y\,j;\ L:\ x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

4. $v(r) = xi - y^2 j + 2zk;\ L:$ a $P_1(4, -2, 1)$ pontból a $P_2(9, 1, -1)$ pontba vezető egyenesszakasz.

5. $v(r) = (x - y)\,i + (x + y)\ \ + xyz\,k;\ L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. $v(r) = (x + yz)\,i + (x^2 - z^2)\,j + (xy + z)\,k;\ L:$ a $P_1(1, 1, 1)$ pontból a $P_2(0, 3, 5)$ pontba vezető egyenesszakasz.

7. $v(r) = (x^2 - y + z)\,i + (x + y^2 + z)\,j + (x + y + z)^2 k;\ L: x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,\ z = 2t,\ 0 \leq t \leq 3$.

8. $v(r) = (x^2 + y + z)\,i + (x + y^2 + z)\,j + (x + y + z^2)\,k;\ L:\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

9. $v(r)$ ugyanaz, mint a 8. példában; $L:$ a 8. példa útjának kezdő- és végpontját összekötő egyenesszakasz.

10. $v(r) = xi + yj + zk;\ \ L:\ x = \cos^2 t,\ y = \frac{1}{2}\sin 2t,\quad z = \sin t$ (Viviani-görbe), $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

A következő feladatokban adott

$$p(r) = p(x, y, z)\,i + q(x, y, z)\,j + r(x, y, z)\,k$$

erőtér által, az adott L görbe mentén, az irányításnak megfelelő elmozdulás esetén végzett munkát kell kiszámítani:

11. $p(r) = xi + yj - zk;\ L:\ x = t^2,\ y = t,\ z = \frac{1}{t},\ 1 \leq t \leq 2$.

12. $p(r) = fM\,\frac{xi + yj + zk}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ (az origóban elhelyezett M tömegpont által létesített gravitációs erőtér; f a gravitációs állandó); $L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ 0 \leq t \leq 4$.

13. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$; $L: x = 2t - 1, \quad y = t + 2, \quad z = 3t,$ $0 \leq t \leq 3$.

14. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$ ugyanaz, mint a 13. példában; L: a 13. példa útjának kezdő- és végpontját összekötő, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesszakaszokból összetett törtvonal.

15. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = (2xz + y^2)\,\boldsymbol{i} + (2xy + z^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + 2y^2)\,\boldsymbol{k}$; L: a $P_1(0, 0, 0)$ pontból a $P_2(3, -1, 2)$ pontba vezető tetszés szerinti görbe.

16. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = (x^2 + 5y + 3yz)\,\boldsymbol{i} + (5x + 3xz - 2)\,\boldsymbol{j} + (3xy - 4z)\,\boldsymbol{k}$; L: a $P_1(0, 0, 0)$ pontból a $P_2(3, -4, 2)$ pontba vezető tetszés szerinti görbe.

17. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = 2xz\boldsymbol{i} - 2yz\boldsymbol{j} + (x^2 - y^2)\,\boldsymbol{k}$; L: a $P_1(0, 0, 0)$ pontból a $P_2(2, 1, 1)$ pontba vezető tetszés szerinti görbe.

18. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = (ye^{xy} - yz \sin xyz)\,\boldsymbol{i} + (xe^{xy} - xz \sin xyz)\,\boldsymbol{j} - xy \sin xyz\,\boldsymbol{k}$; L: a $P_1(0, 0, 0)$ pontból a $P_2\left(1, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ pontba vezető tetszés szerinti görbe.

19. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = (2xe^y + z^2e^x)\,\boldsymbol{i} + (x^2e^y - 2ye^z)\,\boldsymbol{j} + (2ze^x - y^2e^z)\,\boldsymbol{k}$; L: a $P_1(0, 0, 0)$ pontból a $P_2(1, 1, 1)$ pontba vezető tetszés szerinti görbe.

20. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = \left(2xye^{x^2} - \frac{1}{x}\right)\boldsymbol{i} + e^{x^2}\boldsymbol{j} - \frac{2}{z}\,\boldsymbol{k}$; L: a $P_1(1, 0, 1)$ pontból a $P_2(1, 5, 2)$ pontba vezető, az y tengelyt nem metsző, egyébként tetszés szerinti görbe.

21. Valamely közeg, mint szilárd test, a z tengely körül ω szögsebességgel forog Az (x, y, z) pontban a sebességvektor:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\omega y\,\boldsymbol{i} + \omega x\,\boldsymbol{j}.$$

Határozzuk meg $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ cirkulációját az $x^2 + y^2 = a^2$ kör mentén, pozitív irányban.

22. Határozzuk meg a 21. példa vektorának cirkulációját az $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ kör mentén, ugyancsak pozitív irányban.

23. Mutassuk ki, hogy ha $(\boldsymbol{r}) = \dfrac{-ay\,\boldsymbol{i} + ax\,\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$, akkor $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ cirkulációja valamely zárt görbe mentén zérus, ha a görbe nem járja körül a z tengelyt, és $2\pi n$, ha a görbe n-szer kerüli meg a z tengelyt úgy, hogy az útnak az (x, y) síkon való vetülete a koordinátarendszer kezdőpontját az óramutató járásával ellenkező irányban n-szer megkerüli.

d) Teljes differenciál integrálása, potenciál meghatározása

Az alábbi feladatokban határozzuk meg a

$$du = p(x, y, z)\,dx + q(x, y, z)\,dy + r(x, y, z)\,dz$$

teljes differenciál primitív függvényét, a

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

vektortér $u = u(x, y, z)$ potenciálját:

1. $$du = \frac{y}{x^2 + y^2}\,dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy.$$

2. $du = \left(\frac{1}{y \operatorname{tg}\frac{x}{y}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2 \operatorname{tg}\frac{x}{y}} + \frac{x \operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y^2}\right) dy.$

3. $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

4. $du = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}.$

5. $du = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy.$

6. $du = 2xye^{x^2y}\,dx + x^2e^{x^2y}\,dy.$

7. $du = (2xy - 2y - 1)\,dx + (x^2 - 2x - 2y)\,dy.$

8. $du = [\cos(x+y) - \sin(x-y)]\,dx + [\cos(x+y) + \sin(x-y)]\,dy.$

9. $du = [y\cos x - \sin(x-y)]\,dx + [\sin x + \sin(x-y)]\,dy.$

10. $du = yze^{xyz}\,dx + xze^{xyz}\,dy + xye^{xyz}\,dz.$

11. $du = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos x \cdot \sin y\right] dx + \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sin x \cdot \cos y\right] dy.$

12. $du = (3x^2 - 6xy)\,dx + (3y^2 - 3x^2)\,dy.$

13. $du = \frac{2xy}{4-z^2}\,dx + \frac{x^2}{4-z^2}\,dy + \frac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}\,dz.$

14. $du = (2xy - z^2 - yz)\,dx + (x^2 + z^2 - xz)\,dy + (2yz - 2xz - xy)\,dz.$

15. $du = -\frac{1}{2(x-1)^{3/2}}\,dx + z\,dy + y\,dz.$

16. $du = \left(\frac{2x + y - x^2y}{1 - 2xy - x^2}\right)^2 \left(\frac{2}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{1+y^2}\,dy\right).$

17. $du = (a^xb^y \ln a + y\cos x\,y)\,dx + (a^xb^y \ln b + x\cos x\,y)\,dy.$

18. $du = \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{1+y^2}\,dy.$

19. $du = \frac{z}{x\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\,dx + \frac{z}{y\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\,dy - \frac{1}{\sqrt{x^2y^2 - z^2}}\,dz.$

20. $du = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + \sin y + yx^{y-1}\right) dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + x\cos y + x^y \ln x\right) dy.$

8. §. Felületi integrálok

a) Felszín-integrál

Legyen adva egy mérhető felszínű F felület és egy olyan $f(P)$ függvény, mely az F felületen folytonos. Az adott $f(P)$ függvénynek az F felületre kiterjesztett felszín-integrálján a következő összegnek a határértékét értjük:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta F_i,$$

ahol ΔF_i a felület n részfelületre való felosztásával adódó i-edik részfelület felszínének vetülete a felület P_i pontbeli érintősíkjára és $f(P_i)$ e részfelület egy tetszés szerinti P_i pontjában vett függvényérték. A határátmenet módja az, hogy a felosztást minden határon túl finomítjuk, úgy, hogy a részfelületek érintősíkon való vetületeinek legnagyobb átmérője is zérushoz tartson. E határértéket így jelöljük:

$$\iint_F f(P)\, dF.$$

Legyen egy F felületdarab a $z = z(x, y)$ alakban megadva, ennek vetülete az (x, y) síkon a T tartomány, a felületen értelmezett függvény pedig

$$f(P) = f(x, y, z) = f(x, y, z\,(x, y)).$$

Mivel

$$\Delta F \approx \sqrt{z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y) + 1}\, \Delta x\, \Delta y,$$

azért

$$\iint_F f(P)\, dF = \iint_T f\Big(x, y, z(x, y)\Big)\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\; dx\, dy\,.$$

Ennek alapján tetszés szerinti felszín-integrál visszavezethető kettős integrálra. Ha a felület egyenlete paraméteresen van megadva:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

akkor, mivel

$$\Delta F \approx \sqrt{EG - F^2}\, \Delta u\, \Delta v,$$

ahol

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,$$
$$F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u z_v',$$
$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2,$$

azért

$$\iint_F f(P)\, dF = \iint_T f\Big(x(u, v)\, y(u, v), z(u, v)\Big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

b) **Felületi integrál** A felületi integrál a felszín-integráltól csak annyiban különbözik, hogy az integrálösszegben az $f(P_i)$ függvényértéket nem az i-edik részfelület felszínének a felület P_i pontbeli érintősíkján való vetületével, hanem a felületi normálissal irányított részfelület felszínének az (x, y) [vagy (y, z), vagy (x, z)] koordinátasíkra való $\Delta\sigma_i$ vetületével szorozzuk.

Ha az F felületnek az általunk meghatározott oldalára mutató normálisa a felület P pontjában a z tengellyel $\gamma(P)$ szöget zár be, akkor mivel az irányított felületdarab felszínének az (x, y) síkon való vetülete

$$\Delta\sigma_i = \cos\gamma(P_i)\, \Delta F_i \approx \Delta x_\nu\, \Delta y_\mu,$$

az $f(x, y, z)$ függvény felületi integrálja

$$\iint_F f(P) \cos\gamma(P)\, dF = \iint_T f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Hasonló módon értelmezzük a következő integrálokat:

$$\iint_F f(P) \cos\beta(P)\, dF = \iint_T f(x, y, z)\, dx\, dz,$$

$$\iint_F f(P) \cos\alpha(P)\, dF = \iint_T f(x, y, z)\, dy\, dz.$$

ahol $\beta(P)$ a felület P pontbeli normálisának az y tengellyel és $\alpha(P)$ az x tengellyel bezárt szöge.

A felületi integrál jele mellett a felületi normális irányítását, azaz az F felület választott oldalát mindig külön meg kell jelölni.

Ha megváltoztatjuk a felületi normális irányítását (a felület kitüntetett oldalát), akkor az integrál előjele ellenkezőre változik.

Az alkalmazásokban leggyakrabban a felületi integrálok alábbi kombinációival találkozunk:

$$\iint_F p\, dy\, dz + \iint_F q\, dx\, dz + \iint_F r\, dx\, dy,$$

ahol

$$p = p(x, y, z), \quad q = q(x, y, z), \quad r = r(x, y, z).$$

Ezt az összeget egyetlen kettős integráljellel így írjuk fel:

$$\iint_F (p\,dy\,dz + q\,dx\,dz + r\,dx\,dy).$$

Ha a választott irányba mutató felületi normális a koordinátatengelyekkel rendre α, β és γ szögeket zár be, akkor

$$\iint_F (p\,dy\,dz + q\,dx\,dz + r\,dx\,dy) = \iint_F (p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma)\,dF.$$

Ha a felület egyenlete $z = z(x, y)$ alakban van megadva, akkor mivel („felfelé mutató" normális esetén)

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}},$$

$$\cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}},$$

továbbá

$$\Delta F \approx \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}\,\Delta x\,\Delta y,$$

és az F felületdarab vetülete az (x, y) síkon a T tartomány, azért

$$\iint_F (p\,dy\,dz + q\,dx\,dz + r\,dx\,dy) =$$
$$= \iint_T [-z'_x\,p(x, y, z(x, y)) - z'_y\,q(x, y, z(x, y)) + r(x, y, z(x, y))]\,dx\,dy$$

Ha a felület egyenlete paraméteresen van megadva:

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v),$$

akkor a változók transzformációja szerint:

$$\iint_F (p\,dy\,dz + q\,dx\,dz + r\,dx\,dy) =$$
$$= \iint_{T'} \left[p\,\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + q\,\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + r\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] du\,dv.$$

c) Vektoros írásmód

Legyen p, q és r egy vektortér három koordinátája:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + q(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + r(x, y, z)\,\boldsymbol{k},$$

és a felület egyenlete kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel megadva:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k},$$

akkor, mivel az i-edik irányított részfelület felszínének vektora:

$$\Delta \boldsymbol{f}_i = [\boldsymbol{r}'_u(u_i, v_i) \times \boldsymbol{r}'_v(u_i, v_i)] \, \Delta u_i \, \Delta v_i,$$

az adott vektortér felületi integrálja:

$$\iint_F \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f} = \iint_T \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v) \, du \, dv = \iint_t \boldsymbol{v} \, \boldsymbol{r}'_u \, \boldsymbol{r}'_v \, du \, dv.$$

Az előbbi értelmezés és az előbbi képletek a vektoros értelmezéssel egyezőek, mint az koordinátákra bontással egyszerűen igazolható.

d) **Fizikai jelentés**

α) Áramlástani alkalmazás

Ha $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ egy áramló, összenyomhatatlan folyadék sebesség-tere, akkor az

$$\iint_F \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f}$$

felületi integrál az adott F felületdarabon az időegységben átáramló folyadék mennyiségét jelenti.

β) Vektortér fluxusa

Ha $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ valamilyen vektorteret jelent (pl. elektrosztatikus erőteret), akkor az

$$\iint_F \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{f}$$

felületi integrál a vektortér fluxusa az F felületdarabon.

Példák

1. Határozzuk meg az

$$x = R \sin u \cos v, \; y = R \sin u \sin v, \; z = R \cos u, \; 0 \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leqq v \leqq 2\pi,$$

paraméteres alakban megadott, $\varrho = 1$ sűrűségű, homogén félgömbhéj tömegközéppontjának z_s koordinátáját.

A félgömbhéj tömege:

$$M = \varrho \, 2R^2 \pi = 2R^2 \pi.$$

Az (x, y) síkra vonatkozó elsőrendű nyomaték, felszín-integrállal:

$$M_{xy} = \iint \varrho \, z(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u \, du \, dv = R^3 \pi.$$

Így a keresett tömegközéppont koordinátája:

$$z_s = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{R}{2}.$$

2. Számítsuk ki a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ vektortér felületi integrálját az

$$x = (3 + \cos u) \cos v,$$
$$y = (3 + \cos u) \sin v,$$
$$z = \sin u$$

gyűrűfelület (x, y) sík feletti darabja mentén, „felfelé mutató" felületi normális mellett.

A felületi normális vektora:

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = -(3 + \cos u) \cos v \cos u\boldsymbol{i} - (3 + \cos u) \sin v \cos u\boldsymbol{j} - (3 + \cos u) \sin u\boldsymbol{k}.$$

Mivel $\boldsymbol{k}$ együtthatója negatív előjelű, a „felfelé mutató" normális ennek a -1-szerese:

$$-\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v.$$

Az (x, y) sík feletti felületdarabnál a paraméterek az alábbi határok közé esnek:

$$0 \leqq u \leqq \pi,$$
$$0 \leqq v \leqq 2\pi.$$

A felületi integrál, mivel

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(u, v)) = (3 + \cos u) \cos v\boldsymbol{i} + (3 + \cos u) \sin v\boldsymbol{j} + \sin u\boldsymbol{k},$$

a következő:

$$\iint_F \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [(3 + \cos u)^2 \cos u \cos^2 v + (3 + \cos u)^2 \cos u \sin^2 v +$$

$$+ (3 + \cos u) \sin^2 u]\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (3 + 10 \cos u + 3 \cos^2 u)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{9}{2} + 10 \cos u + \frac{3}{2} \cos 2u\right) du\, dv = 9\pi^2.$$

3. Határozzuk meg a

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -xy\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

vektortérnek a $z = x^2 - y^2$ felület azon darabja mentén a felületi integrálját, melynek vetülete az (x, y) síkon a $-2 \leqq x \leqq 2$, $-3 \leqq y \leqq 3$ derékszögű négyszög, „felfelé mutató" felületi normális mellett.

Mivel

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = -2y,$$

és

$$\boldsymbol{v}\Big[\boldsymbol{r}\big(x, y, z(x, y)\big)\Big] = -xy\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + (x^2 - y^2)\boldsymbol{k},$$

azért a keresett felületi integrál:

$$\iint_F \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} (2x^2y + 2xy^2 + x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-3}^{3} \left[\frac{2}{3} x^3y + x^2y^2 + \frac{1}{2}x^3 - xy^2\right]_{-2}^{2} dy = \int_{-3}^{3} \left(\frac{32}{3}y + \frac{16}{3} - 4y^2\right) dy =$$

$$= \left[\frac{16}{3}y^2 + \frac{16}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_{-3}^{3} = -40.$$

Feladatok

a) **Felszín-integrálok**

1. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geqq 0$ egyenlettel megadott, $\varrho = 1$ sűrűségű, homogén forgási paraboloid héj tömegközéppontjának z_s koordinátáját.

2. Határozzuk meg az

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = \operatorname{ch} u,\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi,$$

paraméteresen megadott, $\varrho = 1$ sűrűségű, homogén forgásfelület tömegközéppontjának z_s koordinátáját.

b) **Felületi integrálok**

Az alábbi feladatokban határozzuk meg az adott

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\, \boldsymbol{i} + q(x, y, z)\, \boldsymbol{j} + r(x, y, z)\, \boldsymbol{k}$$

vektortérnek az adott

$$z = z(x, y)$$

vagy

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

felület azon darabjára kiterjesztett felületi integrálját, „felfelé mutató" felületi normális mellett, mely az adott T tartományhoz tartozik.

1. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{xz}\boldsymbol{i} + \frac{1}{yz}\boldsymbol{j}$; $x = 5\cos^3 u \cos v$, $y = 5 \cos^3 u \sin v$, $z = 5 \sin^3 u$;

   $T: \frac{\pi}{4} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$.

2. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$; $x = 4 \cos u \cos v$, $y = 4 \cos u \sin v$, $z = 4 \sin u$;

   $T: v \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$.

3. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = xy\boldsymbol{i} + (2x + y)\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$; $x = u + 2v$, $y = -v$, $z = u^2 + 3v$; $T: 0 \leqq u \leqq 3$, $0 \leqq v \leqq 1$.

4. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = yz\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = 2v$; $T: 0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$.

5. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $z = x^2 + y^2$; $T: (x - 2)^2 + y^2 \leqq 4$.

6. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x + y + z)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; $z = x^2 + 2y^2$; $T: 0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 1$.

7. $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}) = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $z = xy$; $T:$ az az első negyedben fekvő, háromszög alakú zárt síkrész, melyet az $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ egyenesek határolnak.

8. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $z = x^2 - 2y$; $T:$ az az első negyedben fekvő zárt síkrész, melyet az $y = x^2$, $x = y^2$ parabolák határolnak.

9. §. Integráltételek

a) Gauss–Osztrogradszkij-féle tétel

Legyen a V zárt térbeli tartományban és annak határán értelmezett három folytonos függvény:

$$p(x, y, z), \quad q(x, y, z), \quad r(x, y, z),$$

melyeknek folytonos elsőrendű parciális deriváltjai vannak. Vizsgáljuk a V térrészre kiterjesztett következő integrált:

$$\iiint_V \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Vetítsük a V térrészt az (x, y) síkra: így áll elő a T síktartomány. Állítsunk merőlegest a T tartomány tetszés szerinti (x, y) pontjában e síkra, és jelöljük a normális V tartományba való belépési, illetve kilépési pontjának z koordinátáját $z = z_0(x, y)$-nal, illetve $z = z_1(x, y)$-nal. Akkor az előbbi integrál így írható:

$$\iiint_V \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_T dx\, dy \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial z}\, dz =$$

$$= \iint_T r(x, y, z_1)\, dx\, dy - \iint_T r(x, y, z_0)\, dx\, dy.$$

A jobboldali integrálok különbsége azonban nem más, mint az $r(x, y, z)$ függvénynek az egész V térrészt határoló F felületre kiterjesztett felületi integrálja, a zárt térrészből kifelé mutató normálissal.

Ha ugyanezt a meggondolást elvégezzük a p és q függvényekre is, mégpedig p esetén a V térrészt az (y, z) síkra, q esetén az (x, z) síkra vetítve, akkor azt találjuk, hogy

$$\iiint_V \left(\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_F [p(x, y, z)\, dy\, dz + q(x, y, z)\, dx\, dz + r(x, y, z)\, dx\, dy],$$

ahol a jobboldali felületi integrál a zárt térrészből kifelé mutató felületi normálissal veendő.

Tömörebb és kifejezőbb képletet nyerünk, ha bevezetjük a következő vektorteret:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\, \boldsymbol{i} + q(x, y, z)\, \boldsymbol{j} + r(x, y, z)\, \boldsymbol{k}.$$

Mivel

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{v},$$

a tétel röviden így fogalmazható:

$$\boxed{\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV=\iint\limits_F \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{f}}$$

azaz a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér divergenciájának a zárt V térrészre kiterjesztett térfogati integrálja egyenlő a vektortérnek a V térrészt határoló F felületre kiterjesztett felületi integráljával, ahol ez utóbbit a zárt térrészből kifelé mutató felületi normálissal kell számításba vennünk.

b) **Alkalmazás kétváltozós függvényekre**

Legyen a zárt síkbeli tartományban és annak határán értelmezett két folytonos függvény: $p(x, y)$ és $q(x, y)$, melyeknek folytonos elsőrendű parciális deriváltjai vannak. Jelölje továbbá L a T tartomány határgörbéjét, pozitív körüljárási értelemnek megfelelően irányítva. Vizsgáljuk a következő integrált:

$$\iint\limits_T \frac{\partial q\,(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Integráljunk először x szerint és jelöljük az x tengellyel párhuzamos és a T tartomány átmetsző egyenesnek a T tartományba való belépési pontja x koordinátáját $x=x_0(y)$-nal és a T tartományból való kilépési pontja x koordinátáját $x=x_1(y)$-nal. Akkor az előbbi integrál így írható:

$$(a \leqq y \leqq b)$$

$$\iint \frac{\partial q\,(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial q\,(x,y)}{\partial x}\,dx=\int\limits_a^b q(x_1,y)\,dy-\int\limits_a^b q(x_0,y)\,dy.$$

A jobboldali két integrál különbsége azonban nem más, mint a $q(x, y)$ függvénynek a T tartományt határoló L irányított görbe mentén vett integrálja.

Tehát

$$\iint\limits_T q_x'(x,y)\,dx\,dy=\oint\limits_L q(x,y)\,dy.$$

Teljesen hasonlóan adódik:

$$\iint\limits_T p_y'(x,y)\,dx\,dy=-\oint\limits_L p(x,y)\,dx.$$

Tehát

$$\boxed{\iint\limits_T [q_x'(x,y)+p_y'(x,y)]\,dx\,dy=\oint\limits_L [-p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy].}$$

c) **Green-tétel**

Legyen a V zárt térbeli tartományban és annak határán értelmezett két folytonos függvény: $u(x, y, z)$ és $v(x, y, z)$, melyeknek folytonos első- és másodrendű parciális deriváltjai vannak.

Képezzük a következő három függvényt:

$$uv'_x, \quad uv'_y, \quad uv'_z$$

és alkalmazzuk ezekre a Gauss—Osztrogradszkij-fél tételt:

Mivel

$$\frac{\partial(uv'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uv'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(uv'_z)}{\partial z} = uv''_{xx} + uv''_{yy} + uv''_{zz} + u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z =$$

$$= u\,\Delta v + u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z,$$

ahol

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz},$$

azért

$$\iiint_V (u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z)\,dx\,dy\,dz = -\iiint_V u\,\Delta v\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \iint_F (u\,v'_x\,dy\,dz + uv'_y\,dx\,dz + uv'_z\,dx\,dy) = -\iiint_V u\,\Delta v\,dx\,dy\,dz + \iint_F u\frac{\partial v}{\partial n}\,dF.$$

Itt $\frac{\partial v}{\partial n}$ jelenti a v függvénynek a kifelé mutató felületi normális irányában vett deriváltját.

Ha most ebben a képletben u és v szerepét felcseréljük, lesz

$$\iiint_V (u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z)\,dx\,dy\,\Delta z = -\iiint_V v\,\Delta u\,dx\,dy\,dz + \iint_F v\frac{\partial u}{\partial n}\,dF.$$

Vonjuk ezt ki az előbbiből, akkor rendezés után

$$\iiint_V (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz = \iint_F \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dF.$$

d) **Alkalmazás kétváltozós függvényekre**

Legyen $u(x, y)$ és $v(x, y)$ két, az L pozitív körüljárásnak megfelelően irányított peremgörbével rendelkező T tartományban és annak határán értelmezett, folytonos első- és másodrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény.

Mivel

$$\frac{\partial(uv'_x)}{\partial x} = u'_x v'_x + uv''_{xx},$$

$$\frac{\partial(uv'_y)}{\partial y} = u'_y v'_y + uv''_{yy},$$

másrészt

$$\iint \left(\frac{\partial(uv'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uv'_y)}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L [-(uv'_y)\,dx + (uv'_x)\,dy],$$

azért

$$\iint_T (u'_x v'_x + u'_y v'_y)\, dx\, dy = -\iint_T u\, \Delta v\, dx\, dy + \oint_L (-uv'_y\, dx + uv'_x\, dy),$$

ahol $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy}$.

A képletben u és v szerepét felcserélve:

$$\iint_T (u'_x v'_x + u'_y v'_y)\, dx\, dy = -\iint_T v\, \Delta u\, dx\, dy + \oint_L (-vu'_y\, dx + vu'_x\, dy).$$

A két egyenlőséget egymásból kivonva és rendezve adódik:

$$\iint_T (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dx\, dy = \oint_L [(vu'_y - uv'_y)\, dx - (vu'_x - uv'_x)\, dy].$$

A jobboldali görbementi integrált még másképpen is felírhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy egy tetszés szerinti $f(x, y)$ függvénynek egy, az (x, y) síkban fekvő zárt görbe kifelé mutató normálisa irányában vett deriváltja:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial n} = f'_x \frac{dy}{ds} - f'_y \frac{dx}{ds}.$$

Ugyanis

$$\oint_L [(vu'_y - uv'_y)\, dx - (vu'_x - uv'_x)\, dy] = \oint_L \left[(uv'_x - vu'_x)\frac{dy}{ds} - (uv'_y - vu'_y)\frac{dx}{ds}\right] ds =$$

$$= \oint_L \left[u\left(v'_x \frac{dy}{ds} - v'_y \frac{dx}{ds}\right) - v\left(u'_x \frac{dy}{ds} - u'_y \frac{dx}{ds}\right)\right] ds = \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.$$

Így végeredményben

$$\boxed{\iint_T (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dx\, dy = \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.}$$

e) Függvénydeterminány integrálja

Mivel

$$\iint_T (q'_x + p'_y)\, dx\, dy = \oint_L (-p\, dx + q\, dy),$$

azaz

$$\iint (q'_x - p'_y)\, dx\, dy = \oint (p\, dx + q\, dy),$$

azért

$$\iint_T (u'_x v'_y - u'_y v'_x)\, dx\, dy = \iint_T \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx\, dy = \iint_{T'} du\, dv = \oint_L (uv'_x\, dx + uv'_y\, dy) =$$

$$= \oint_{L'} u\, dv.$$

Ez pedig nem más, mint az (u, v) síkban, az $u = u(v)$ függvénnyel megadott L' zárt görbe által körülhatárolt T' tartomány területe.

f) Stokes-tétel

Legyen L egy szakaszonként sima, irányított zárt térgörbe és F egy erre kifesztített felületdarab, melynek normálisa folytonos, vagy szakaszonként folytonos, és képezzen a peremgörbe irányításával jobb-rendszert. Legyen továbbá az F felületet tartalmazó térrészben értelmezett három folytonos parciális deriváltakkal rendelkező függvény: $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$.

Képezzünk ebből a három függvényből három további függvényt a következő módon:

$$a(x, y, z) = \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \quad b(x, y, z) = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \quad c(x, y, z) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Legyen továbbá az F felület paraméteres megadása:

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v).$$

Ekkor

$$\iint_F (a\, dy\, dz + b\, dx\, dz + c\, dx\, dy) =$$

$$= \iint_T \left[\left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] du\, dv.$$

Ez utóbbi integrált átalakíthatjuk, ha külön csoportosítjuk azokat a tagokat, amelyek p-t, q-t, illetve r-t tartalmazzák. Így pl. a p-t tartalmazó tagok lesznek

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) -$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) -$$

$$-\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Hasonlóan a másik kettőre adódik

$$\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Ámde

$$\iint_T \left[\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right] du\, dv = \iint_T \frac{\partial(p, x)}{\partial(u, v)}\, du\, dv =$$

$$= \oint_K \left(p\frac{\partial x}{\partial u} du + p\frac{\partial x}{\partial v} dv\right) = \oint_L p\frac{dx}{ds} ds = \oint_L p\, dx,$$

és hasonlóan

$$\iint_T \left[\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right] du\, dv = \oint_L q\frac{dy}{ds} ds = \oint_L q\, dy,$$

$$\iint_T \left[\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right] du\, dv = \oint_L r\frac{dz}{ds} ds = \oint_L r\, dz.$$

Így végül

$$\iint_F \left[\left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right) dx\, dz + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\, dy\right] =$$

$$= \oint_L (p\, dx + q\, dy + r\, dz).$$

Rövidebben és tömörebben fogalmazhatjuk ezt meg, ha bevezetjük a következő vektorteret:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = p(x, y, z)\, \boldsymbol{i} + q(x, y, z)\, \boldsymbol{j} + r(x, y, z)\, \boldsymbol{k}.$$

Lesz

$$\iint_F \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \oint_L \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r},$$

azaz a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér rotációjának az F felületdarabra kiterjesztett felületi integrálja egyenlő a vektortérnek az F felületdarabot határoló L zárt görbére kiterjesztett görbementi integráljával, ahol a görbementi integrálnál a körüljárás értelmét úgy kell megválasztanunk, hogy ez az irányítás a felületi integrálban választott felületi normálissal jobb-rendszert képezzen.

Röviden még így is fogalmazhatjuk a tételt: a $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}$ vektorfüggvény F felületi fluxusa egyenlő a $\boldsymbol{v}$ vektorfüggvénynek az L peremgörbe menti cirkulációjával.

Példák

1. Legyen a vektortér:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelület, a $z = 1$ és $z = -1$ síkok körülzárják a V térrészt. Számítsuk ki a vektortérnek a hengeres testet határoló teljes felületre kiterjesztett felületi integrálját, majd igazoljuk e példán a Gauss—Osztrogradszkij-tétel helyességét.

A felületi integrált három részben számítjuk:

a) A henger palástjára:

A hengerfelület kétparaméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}.$$

A felületi normális vektora:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j}.$$

Ez a vektor a hengerből kifelé mutat. Ezzel a felületi integrál:

$$\iint_{F_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} (4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u)\, du\, dv = 16\pi.$$

b) A henger fedőlapja:

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leqq u \leqq 2, \quad 0 \leqq v \leqq 2\pi.$$

A felületi normális vektora:

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = u\mathbf{k}.$$

Ez a vektor felfelé, tehát a V térrészből kifelé mutat. Ezzel a felületi integrál:

$$\iint_{F_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} u\, du\, dv = 4\pi.$$

c) A henger alaplapja:

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad 0 \leqq u \leqq 2, \quad 0 \leqq v \leqq 2\pi.$$

A felületi normális vektora:

$$-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = -u\mathbf{k}.$$

Ez a vektor lefelé mutat, tehát a V térrészből kifelé. Ezzel a felületi integrál:

$$\iint_{F_3} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} u\, du\, dv = 4\pi.$$

Az egész felületre kiterjesztett felületi integrál az előbbi három integrál összege:

$$\iint_{F} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \iint_{F_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} + \iint_{F_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} + \iint_{F_3} \mathbf{v}\, d\mathbf{f} = 24\pi.$$

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint

$$\iiint_{V} \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV$$

értéke ugyanakkora kell, hogy legyen.

Mivel

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

azért

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = 3 \iiint_V dV = 24\pi.$$

2. Legyen

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (x + y + z)\, \boldsymbol{i} + xyz \boldsymbol{j} + x^2 \boldsymbol{k}.$$

Határozzuk meg a $\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{v}$ vektortérnek a $z = x^2 + y^2$ felület azon darabjára kiterjesztett felületi integrálját, mely az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelület belsejébe esik. Majd igazoljuk e példán a Stokes-tétel helyességét.

Mivel

$$\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{v} = -xy\boldsymbol{i} + (1 - 2x)\boldsymbol{j} + (yz - 1)\, \boldsymbol{k},$$

$$z'_x = 2x, \quad z'_y = 2y,$$

azért „felfelé mutató" normálissal:

$$\iint_F \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \iint_T (2x^2y - 2y + 4xy + yz - 1)\, dx\, dy.$$

Számoljunk polárkoordinátákban:

$$\iint_F \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (2r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 2r^2 \sin \varphi + 4r^3 \cos \varphi \sin \varphi + r^4 \sin \varphi - r)\, dr\, d\varphi = -4\pi.$$

A felületdarabot $z = 4$ magasságban egy 2 egység sugarú kör határolja. Ennek a görbének paraméteres egyenlete:

$$\boldsymbol{r}(t) = 2 \cos t \boldsymbol{i} + 2 \sin t \boldsymbol{j} + 4 \boldsymbol{k}.$$

A görbementi integrálhoz szükségünk van még a következőkre:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -2 \sin t \boldsymbol{i} + 2 \cos t \boldsymbol{j},$$

és

$$\boldsymbol{v}\, [\boldsymbol{r}(t)] = (2 \cos t + 2 \sin t + 4)\, \boldsymbol{i} + 16 \sin t \cos t \boldsymbol{j} + 4 \cos^2 t \boldsymbol{k}.$$

A görbementi integrál, helyesen választott körüljárási értelemmel:

$$\oint_L \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{v}\, [\boldsymbol{r}(t)]\, \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4 \sin t \cos t - 4 \sin^2 t - 8 \sin t + 32 \sin t \cos^2 t)\, dt = -4\pi.$$

A két eredmény valóban egyezik!

EREDMÉNYTÁR

3. §. Kettős és hármas integrálok

a) Integrálási határok meghatározása

1. $$\int_0^2 \int_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$ **(35. ábra).**

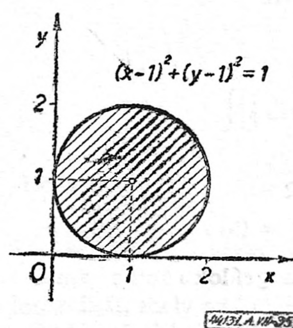
2. $$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy\,dx$$ (36. ábra).

3. $$\int_0^2 \int_0^{2-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{4-2x} f(x,y)\,dy\,dx$$ (37. ábra).

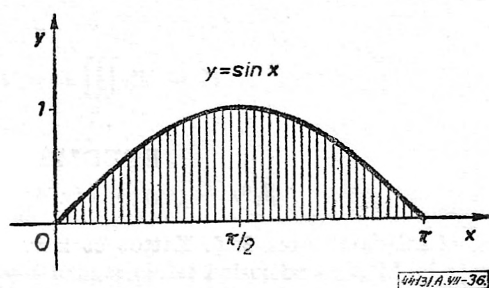
4. $$\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}x-1}^{1-\frac{1}{2}x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \int_0^{2+2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^{2-2y} f(x,y)\,dx\,dy$$ (38. ábra).

5. $$\int_0^2 \int_0^{2x-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y}}^{1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$ (39. ábra).

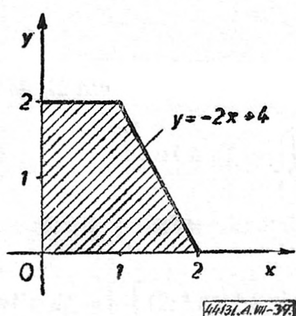
6. $$\int_0^2 \int_{1-\frac{1}{2}x}^{1+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$ (40. ábra)



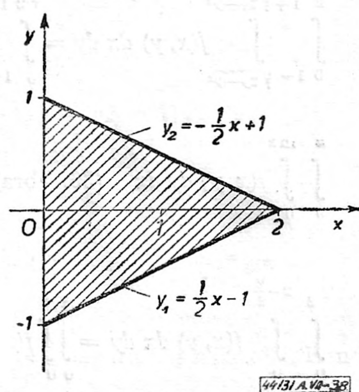
35. *ábra*



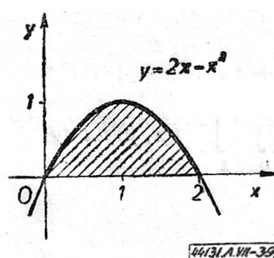
36. *ábra*



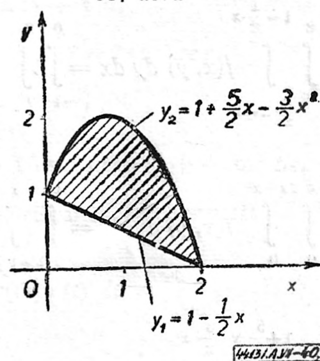
37. *ábra*



38. *ábra*



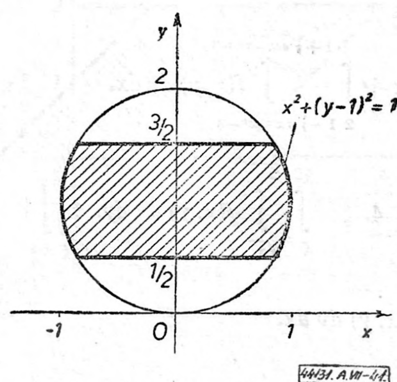
39. *ábra*



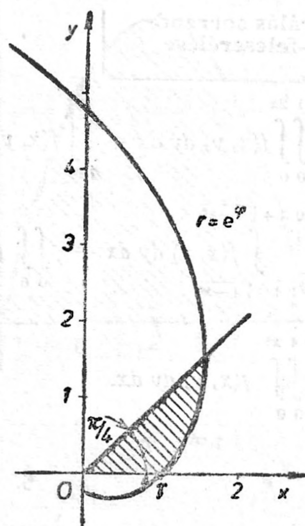
40. *ábra*

7. $$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy \quad (41.\ \text{ábra}).$$

8. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{e^\varphi} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi \quad (42.\ \text{ábra}).$$



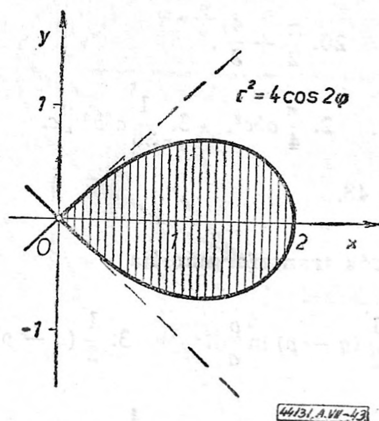
41. ábra



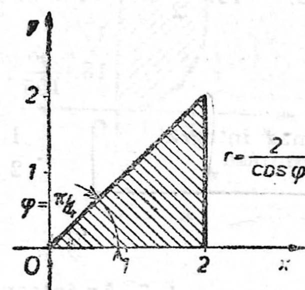
42. ábra

9. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi \quad (43.\ \text{ábra}).$$

10. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r, \varphi)\, dr\, d\varphi \quad (44.\ \text{ábra}).$$



43. ábra



44. ábra

b) **Integrálási tartomány meghatározása**

1. L. a 45. ábrát. 2. L. a 46. ábrát.
3. L. a 47. ábrát. 4. L. a 48. ábrát.
5. L. a 49. ábrát. 6. L. az 50 ábrát.
7. L. az 51. ábrát. 8. L. az 52. ábrát.
9. L. az 53. ábrát. 10. L. az 54. ábrát.

c) **Integrálás sorrendjének felcserélése**

1. $\int_0^1\int_0^{2x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^3\int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx + \int_3^4\int_0^{8-2x} f(x,y)\,dy\,dx.$

2. $\int_{-1}^{0}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^2\int_0^2 f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3\int_{1-\sqrt{4x-x^2-3}}^{1+\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy\,dx.$

3. $\int_0^4\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx.$

4. $\int_0^2\int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{2}+3} f(x,y)\,dx\,dy. + \int_2^{16}\int_{\sqrt{y}}^{4} f(x,y)\,dx\,dy$

5. $\int_1^4\int_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx.$

d) **Kettős integrál kiszámítása**

1. $\frac{5\pi}{4}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. $\ln\frac{25}{24}$. 4. 660. 5. $\frac{\pi}{12}$.

6. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. 7. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. 8. $\frac{32}{45}R^5$. 9. $\frac{33}{140}$. 10. $\frac{1}{280}$. 11. $\frac{9}{4}$.

12. -2. 13. $\frac{27}{2}$. 14. $76\frac{1}{3}$. 15. $\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$. 16. $\frac{1}{8}R^4$. 17. $\frac{1}{3}$.

18. $\frac{88}{105}$. 19. $\frac{abc}{3}$. 20. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$.

e) **Hármas integrál kiszámítása**

1. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. 2. $\frac{\pi}{4}abc^2$. 3. $\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}$.

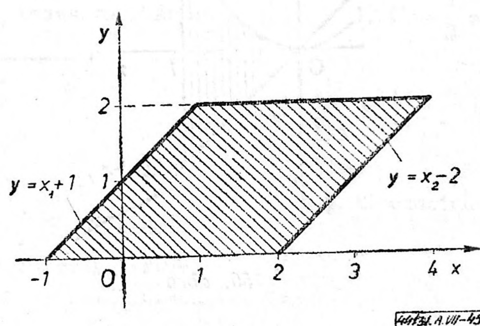
4. 36. 5. 48.

4. §. Az integrációs változók transzformációja

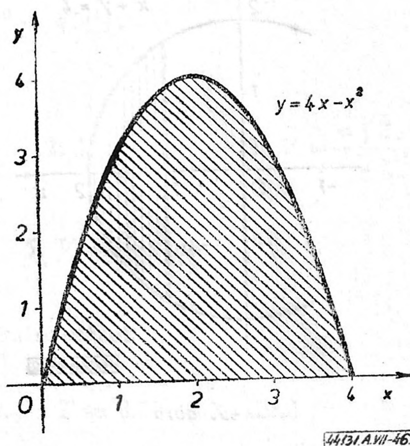
a) **Kettős integrál változóinak transzformációja**

1. $\frac{R^4}{8}$. 2. $\frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}$. 3. $\frac{1}{3}(q-p)\ln\frac{b}{a}$.

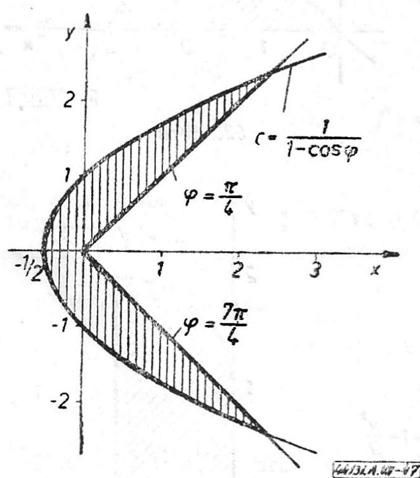
4. $\frac{1}{6}(q^2-p^2)(b^3-a^3)$. 5. $\frac{1}{2}\frac{(b-a(q^2-p^2)}{(1+a)(1+b)}$. 6. $\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$.



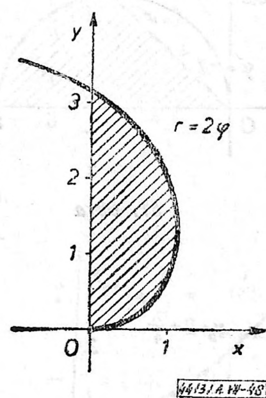
45. ábra



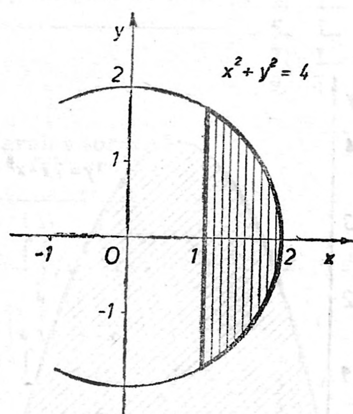
46. ábra



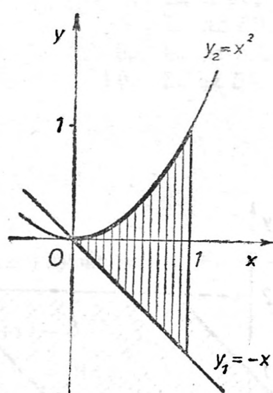
47. ábra



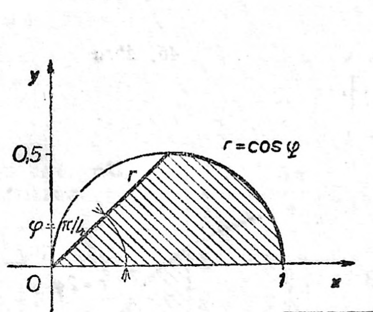
48. ábra



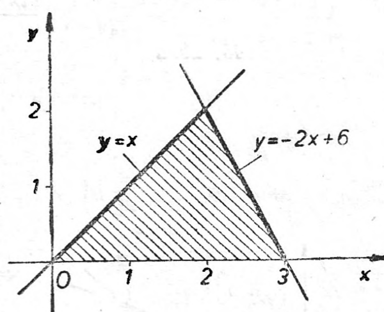
49. ábra



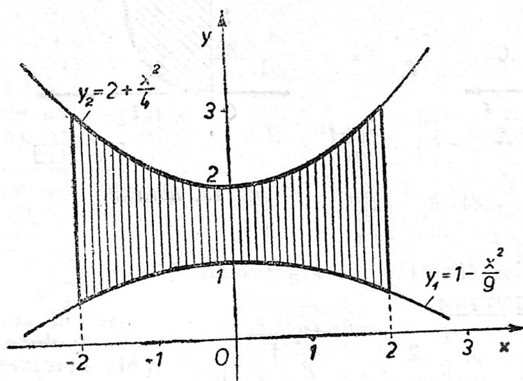
50. ábra



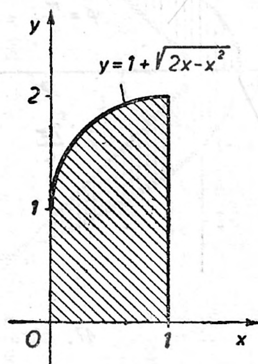
51. ábra



52. ábra



53. ábra



54. ábra

7. $\dfrac{\sin pb - \sin pa}{p} - \dfrac{\sin qb - \sin qa}{q}$. 8. $\dfrac{5}{48}\left(a^{-\frac{6}{5}} - b^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}}\right)$.

9. $\dfrac{1}{40}(b^4 - a^4)(p^{-10} - q^{-10})$.

b) **Hármas integrál változóinak transzformációja**

1. $V = \dfrac{1}{3}\pi$. 2. $V = \dfrac{1}{6}$. 3. $V = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

4. $V = \dfrac{\pi}{192}\dfrac{a^7 b^4 c}{h^9}$. 5. $V = \dfrac{4}{35}\pi\, abc$.

5. §. Geometriai alkalmazások

a) **Síkrész területe**

1. $T \approx 3{,}59$. (55. ábra)

2. $T \approx 5{,}47$ (56. ábra).

3. $T = 1$. (57. ábra).

4. $T = \dfrac{3\pi}{16}$ (58. ábra).

5. $T = \dfrac{3}{2}$ (59. ábra).

6. $T = 8\pi$ (60. ábra).

7. $T = \dfrac{8}{3}$ (61. ábra).

8. $T = 1$. (62. ábra).

9. $T = \dfrac{4}{3}$ (63. ábra).

10. $T = \dfrac{4}{3}$ (64. ábra).

b) **Hengerszerű test térfogata**

1. $V \approx 9{,}4$ (65. ábra).

2. $V = \dfrac{3}{4}\pi$ (66. ábra).

3. $V \approx 27{,}75$ (67. ábra).

4. $V = -\dfrac{2}{3}$. (68. ábra).

5. $V = \dfrac{8}{15}$ (69. ábra).

6. $V = \dfrac{16}{9}$ (70. ábra).

7. $V \approx -1{,}51$ (71. ábra).

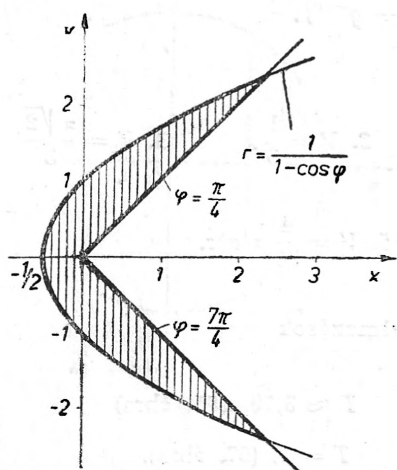
8. $V \approx -1{,}4$ (72. ábra).

9. $V = \dfrac{16}{3}$ (73. ábra).

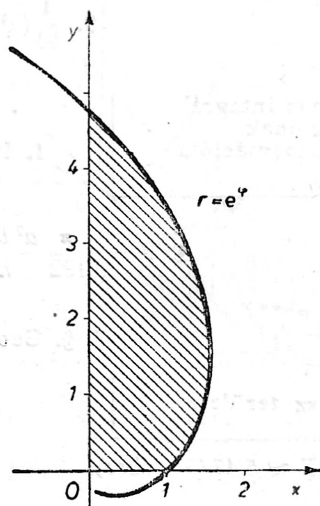
10. $V \approx 11{,}78$ (74. ábra).

11. $V = \dfrac{14}{3}$ (75. ábra).

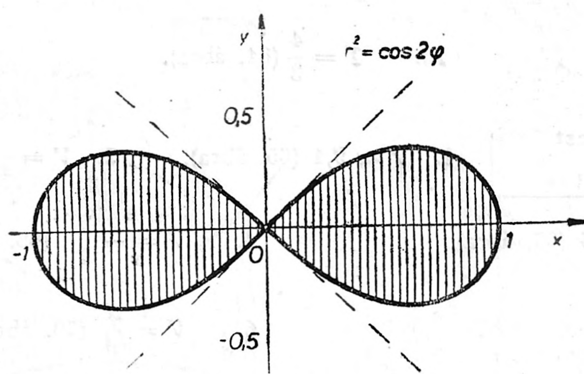
12. $V \approx 36{,}48$ (76. ábra).



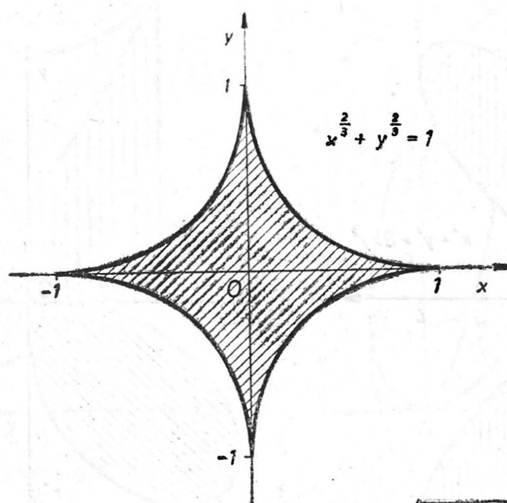
55. ábra



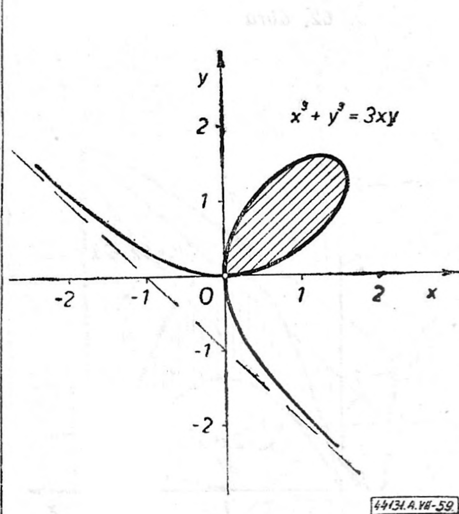
56. ábra



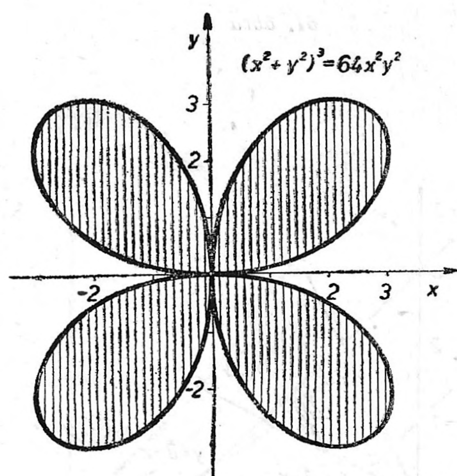
57. ábra



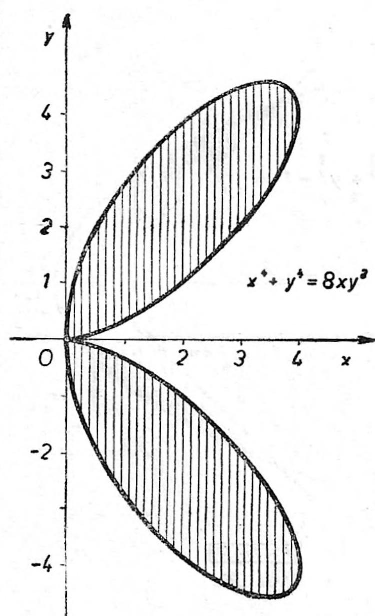
58. ábra



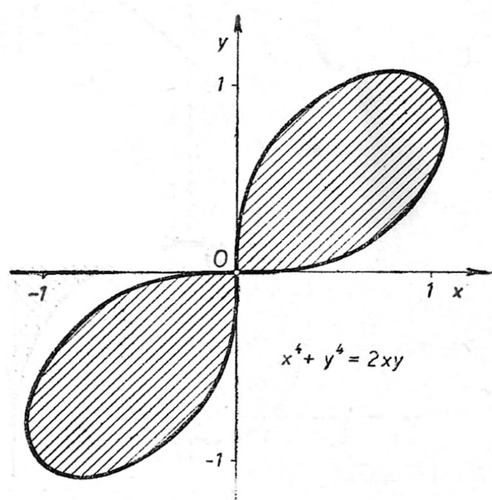
59. ábra



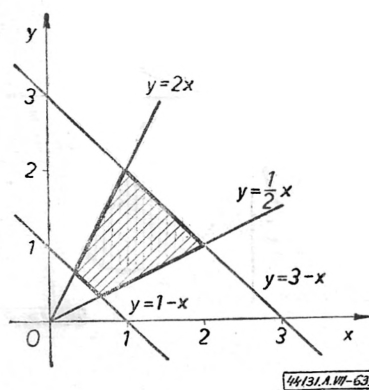
60. ábra



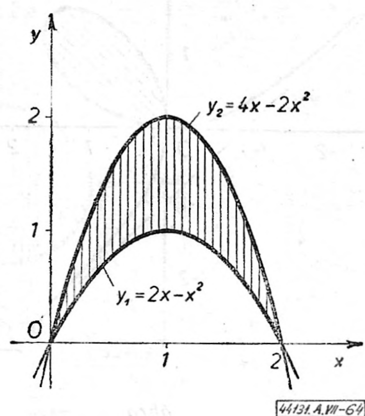
61. ábra



62. ábra



63. ábra



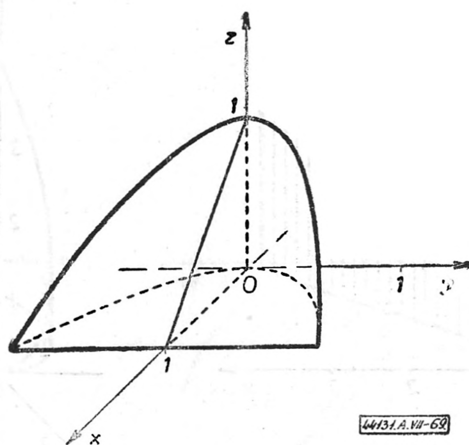
64. ábra

65. ábra

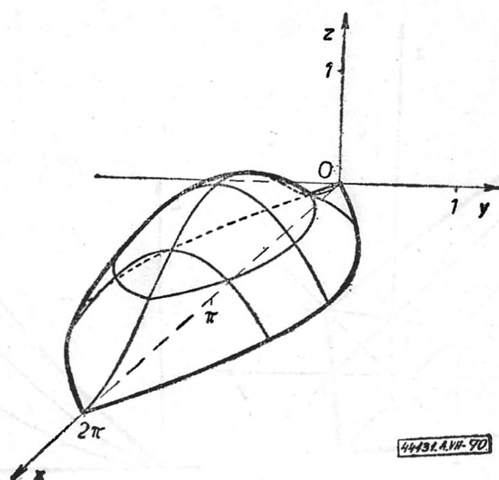
66. ábra

67. ábra

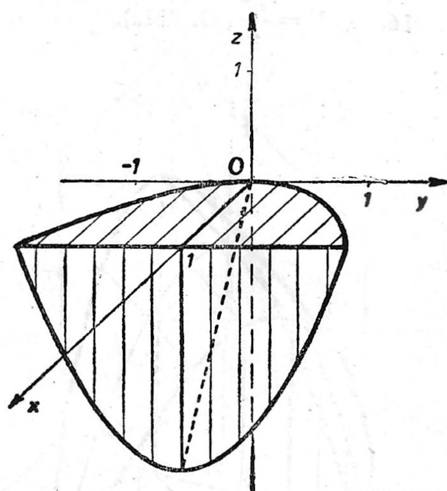
68. ábra



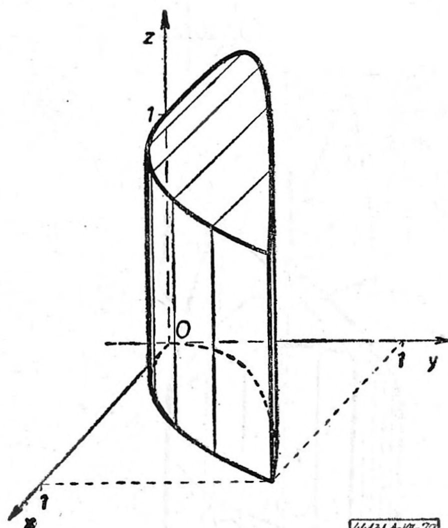
69. ábra



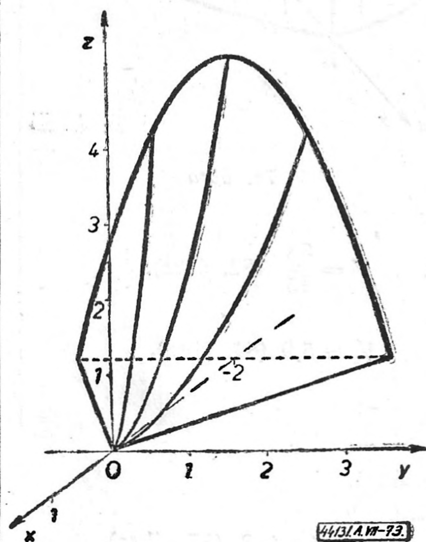
70. ábra



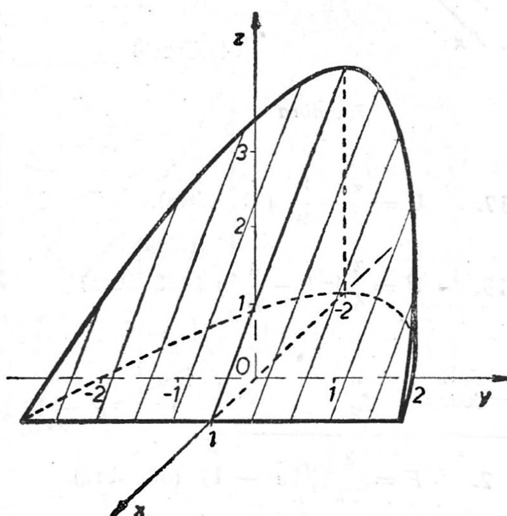
71. ábra



72. ábra



73. ábra



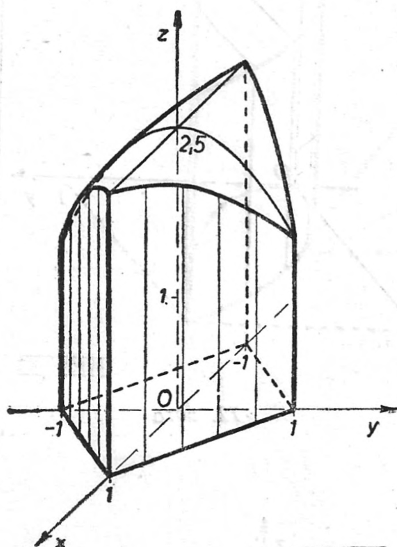
74. ábra

13. $V = 3\pi - \frac{8}{3}$ (77. ábra).

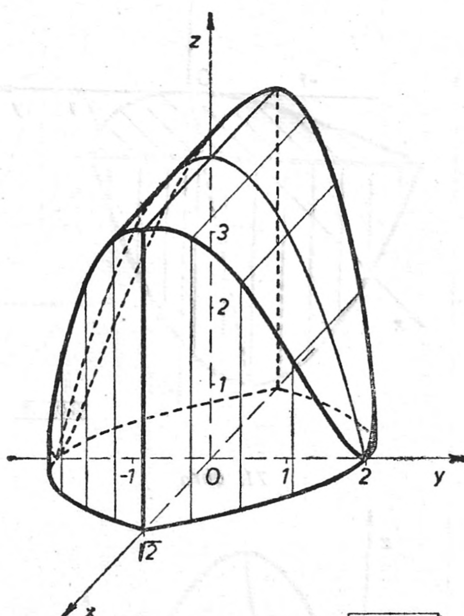
14. $V = 4$ (78. ábra).

15. $V = \frac{\pi^2}{16}$ (79. ábra).

16. $V = \frac{7\pi}{4}$ (80. ábra).



75. ábra



76. ábra

17. $V = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9}$ (81. ábra).

18. $V = \frac{88}{15}$ (82. ábra).

19. $V = \frac{5}{4} \ln 5 - \frac{4}{3} \ln 4$ (83. ábra).

20. $V \approx 5{,}9$ (84. ábra).

c) Felületdarab felszíne

1. $F = 16$ (85. ábra).

2. $F = \frac{4}{27}(\sqrt{19^3} - 1)$ (86. ábra).

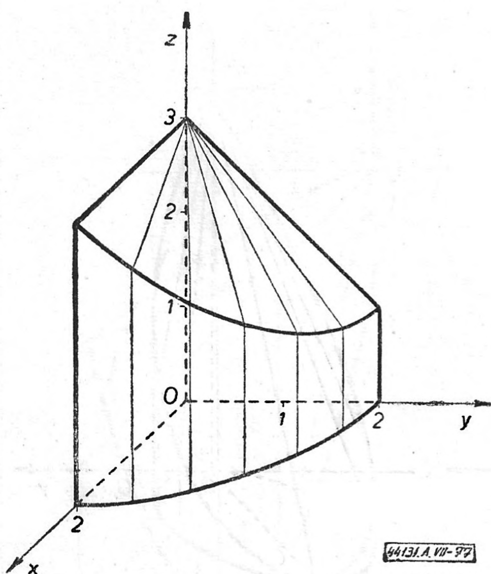
3. $F = 4\pi + 8$ (87. ábra).

4. $F = 4\sqrt{2}\,\pi$ (88. ábra).

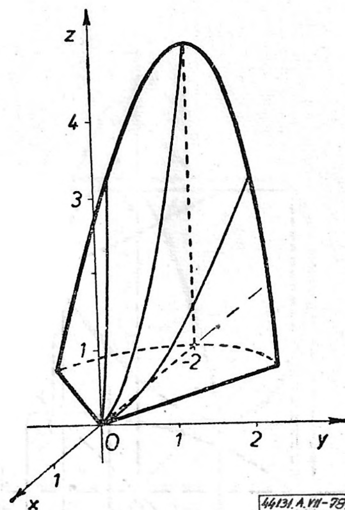
5. $F = \frac{\pi}{192}(\sqrt{17^3} - 1)$ (89. ábra).

6. $F = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$ (90. ábra).

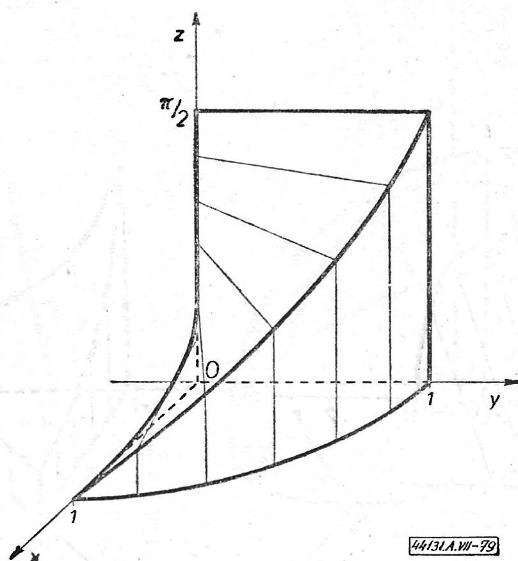
7. $F = 2\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ (91. ábra).



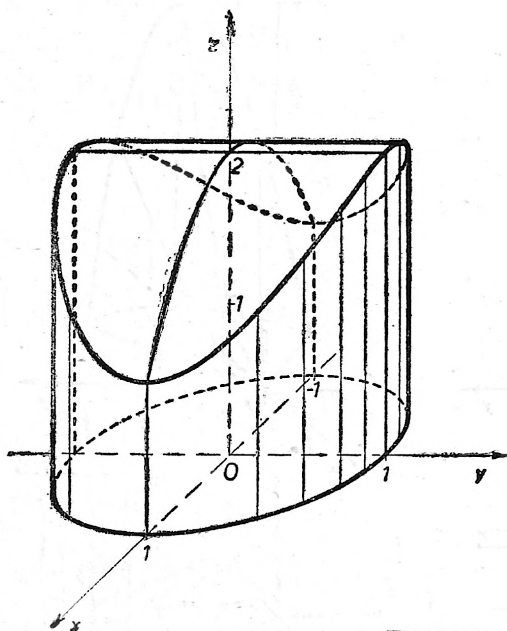
77. ábra



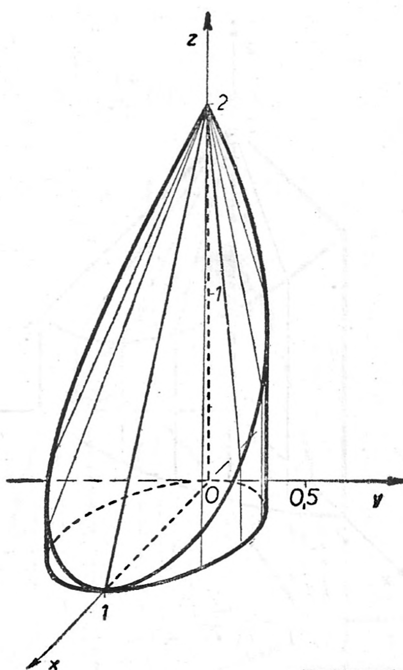
78. ábra



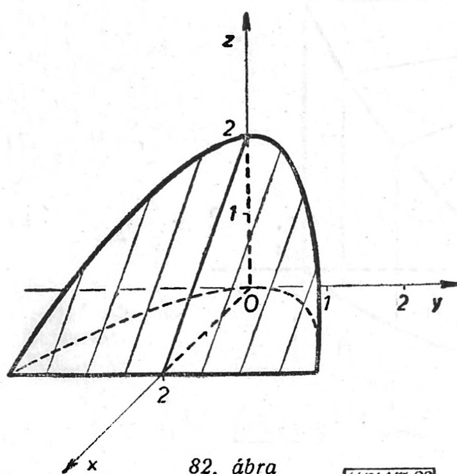
79. ábra



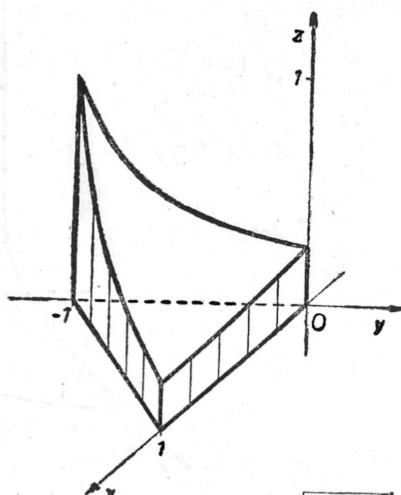
80. ábra



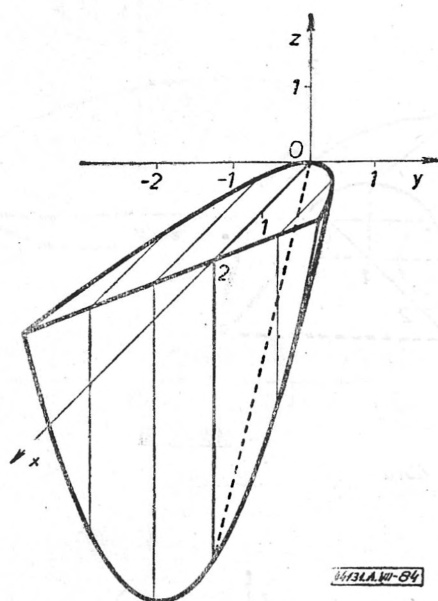
81. ábra



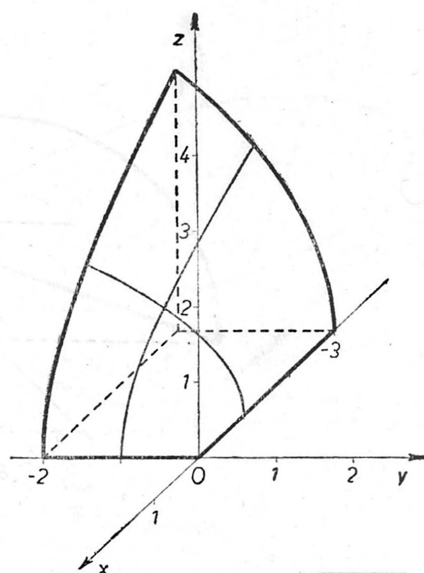
82. ábra



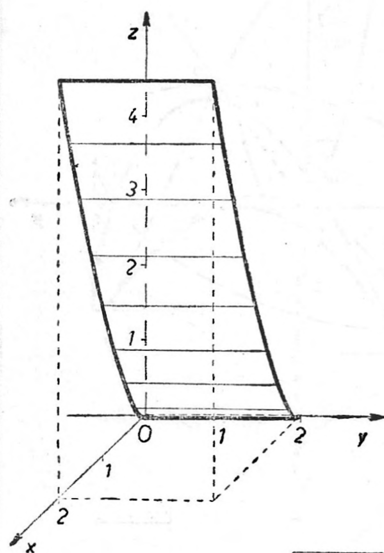
83. ábra



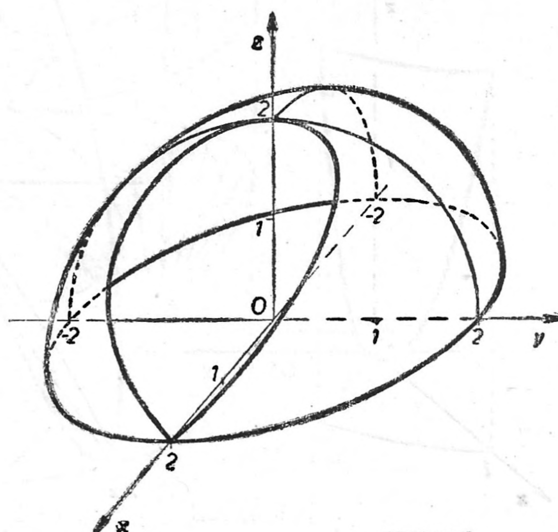
84. ábra



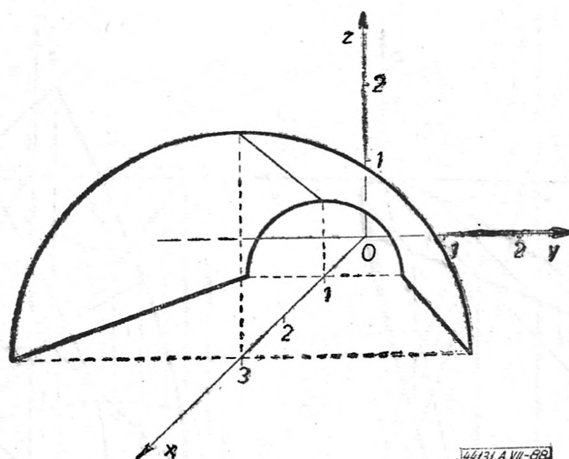
85. ábra



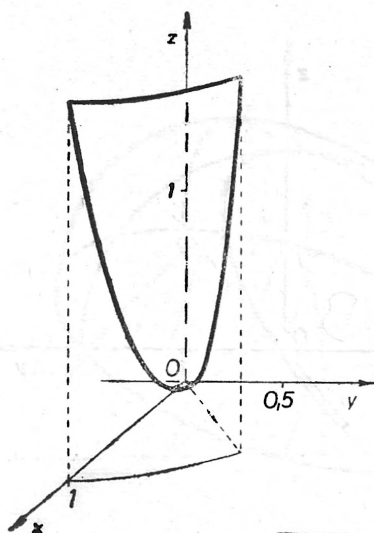
86. ábra



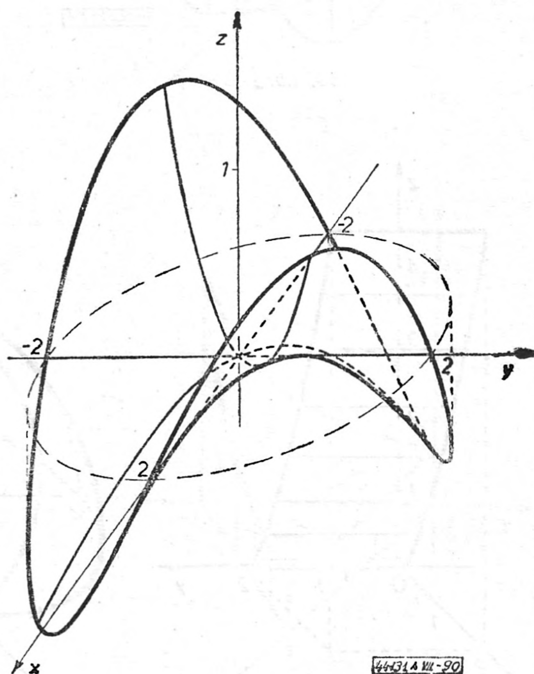
87. ábra



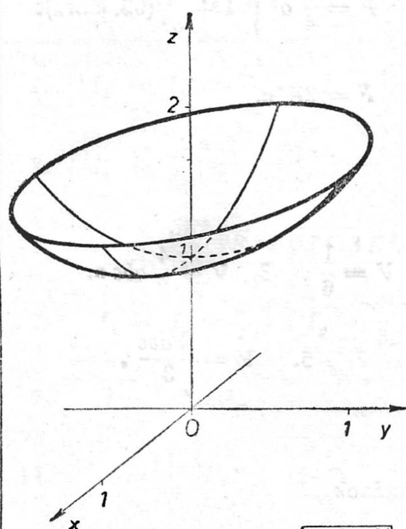
88. ábra



89. ábra

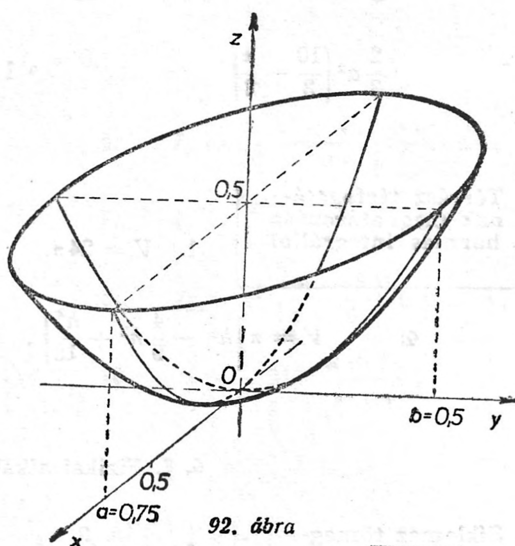


90. ábra



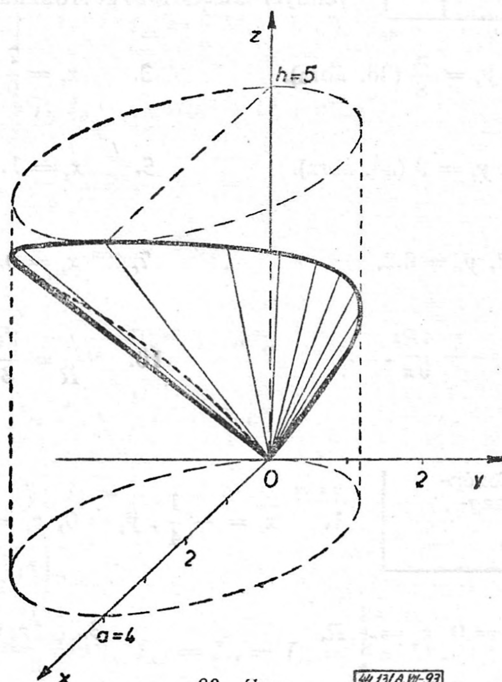
91. ábra

44131.A.VII-91



92. *ábra*

44131.A.VII-92



93. ábra

44.131 A.VII-93

8. $F = \frac{2}{3}\pi ab\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ (92. ábra). 9. $F = \frac{\pi}{4}a^2\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ (93. ábra).

10. $F = \frac{2}{3}a^2\left(\frac{10}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$. 11. $F = 2R^2\pi$.

d) **Térrész térfogatának meghatározása hármas integrállal**

1. $V = 24\pi$. 2. $V = \frac{1}{6}$. 3. $V = \frac{4}{3}abc\,\pi$.

4. $V = \pi\left(h^2 - \frac{4}{9}h^3 + \frac{h^4}{18}\right)$. 5. $V = \frac{\pi\, abc}{3}$.

6. §. Fizikai alkalmazások

a) **Síklemez tömegközéppontjának meghatározása**

1. $x_s = \frac{3}{8}a$, $y_s = \frac{3}{5}b$, ahol a és b az $y = px^2$ függvénnyel összetartozó koordináták: $b = pa^2$.

2. $x_s = \frac{\pi}{2}$, $y_s = \frac{\pi}{8}$ (36. ábra). 3. $x_s = \frac{7}{9}$, $y_s = \frac{8}{9}$ (37. ábra).

4. $x_s = \frac{2}{3}$, $y_s = 0$ (38. ábra). 5. $x_s = 1$, $y_s = 1{,}1$ (40. ábra).

6. $x_s = 8{,}2$, $y_s = 6{,}2$. 7. $x_s = 0, y_s = \frac{4(R^2 + r^2 + Rr)}{3\pi(R + r)}$.

8. $x_s = y_s = -\frac{4R}{9\pi}$. 10. $\frac{h}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) **Test tömegközéppontjának meghatározása**

1. $x_s = -\frac{1}{4}$, $y_s = 0$, $z_s = \frac{17}{16}$.

2. $x_s = y_s = 0$, $z = \frac{3}{8}R$. 3. $z_s = \frac{h}{4}\cdot\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$.

4. $x_s = y_s = z_s = \frac{3}{8}R$; $r_s = \frac{3\sqrt{3}}{8}R$. 5. $h = 2R\,\frac{3n - 4}{3n}$.

c) Síklemez másodrendű nyomatéka

1. $I_x = \frac{ab^3}{12}$, $I_y = \frac{a^3b}{12}$; $I_p = \frac{ab}{12}(a^2+b^2)$; $I_c = 0$.

2. $I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$; $I_p = \frac{a^4}{6}$; $I_c = 0$.

3. $I_x = \frac{am^3}{36}$.

4. $I_x = \frac{1}{36}\,\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\,m^3$.

5. $I_x = \frac{5R^4}{16}\sqrt{3} \approx 0{,}5413\,R^4$.

6. $I_x = \frac{5R^4}{16}\sqrt{3} \approx 0{,}5413\,R^4$.

7. $I_x = I_y = \frac{d^4\pi}{64}$; $I_p = \frac{d^4\pi}{32}$.

8. $I_x = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \approx 0{,}1098\,R^4$.

9. $I = \frac{1}{6}Mm^2$.

10. $I = \frac{1}{6}\,Mh^2\,\frac{a+3b}{a+b}$.

11. $I = \frac{1}{24}M(a^2+12m^2)$.

12. $I_a = \frac{1}{4}Mb^2$; $I_b = \frac{1}{4}\cdot Ma^2$; $I_p = \frac{1}{4}M\,(a^2+b^2)$.

d) Testek tehetetlenségi nyomatéka

1. $I_{aa} = \frac{1}{3}M(b^2+c^2)$, $I_{bb} = \frac{1}{3}M(a^2+c^2)$;

$I_{cc} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$; $I_p = \frac{1}{12}M(a^2+b^2+c^2)$.

2. $I_{xx} = \frac{2}{5}MR^2$; $I_p = \frac{3}{5}\,MR^2$.

3. $I_{zz} = \frac{Mr^2}{2}$; $I_{xx} = \frac{1}{12}M(3r^2+m^2)$.

4. $I_{zz} = \frac{3}{10}Mr^2$; $I_{xx} = \frac{1}{20}\,M(3r^2+2m^2)$.

5. $I_{zz} = \frac{1}{3}Mr^2$.

6. $I_{aa} = \frac{1}{5}M\,(b^2+c^2)$, $I_{bb} = \frac{1}{5}M(a^2+c^2)$;

$I_{cc} = \frac{1}{5}M\,(a^2+b^2)$; $I_p = \frac{1}{5}\,(a^2+b^2+c^2)\,M$.

7. $I_{xz} = M\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$.

8. $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Ma^2$; $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = \frac{1}{4}a^2\,M$.

$$a^2M\left[\frac{2}{3}\,(x^2+y^2+z^2) - \frac{1}{2}\,(xy+yz+xz)\right] = 1.$$

e) **Tömegeloszlás potenciálja**

1. $$\Phi = 2\pi\varrho\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right) = \begin{cases} 2\pi\varrho\left(\sqrt{R^2+z^2}+z\right), & \text{ha } z < 0, \\ 2\pi R\varrho, & \text{ha } z = 0, \\ 2\pi\varrho\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right), & \text{ha } z > 0. \end{cases}$$

2. $$\Phi = 2\pi\, ab\, \varrho\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}-|z|\right).$$

3. $$\Phi = \pi\varrho\left[R_2^2 \ln \frac{z-a-\sqrt{R_2^2+(z-a)^2}}{z+a-\sqrt{R_2^2+(z+a)^2}} - R_1^2 \ln \frac{z-a-\sqrt{R_1^2+(z-a)^2}}{z+a-\sqrt{R_1^2+(z+a)^2}} + (z+a)\left(\sqrt{R_2^2+(z+a)^2}-\sqrt{R_1^2-(z+a)^2}\right) - (z-a)\left(\sqrt{R_2^2+(z-a)^2}-\sqrt{R_1^2+(z-a)^2}\right)\right].$$

7. §. Vonalintegrálok

a) **Ívhossz szerinti integrál**

1. $F = 16\pi$. 2. $F = \frac{\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$.

3. $r_s = R\frac{\sin\varphi}{\varphi}$. 4. $x_s = \frac{4}{5}R$, $y_s = 0$. 5. $x_s = \pi a$, $y_s = \frac{3}{4}a$.

6. $x_s = a\frac{\sin m}{m}$, $y_s = a\frac{1-\cos m}{m}$, $z_s = \frac{hm}{2}$.

7. $x_s = \frac{2}{5}$, $y_s = \frac{1}{5}$, $z_s = \frac{1}{2}$.

b) **Térgörbék ívhossza**

1. $s = 5$. 2. $s = 4$. 3. $s = \frac{5}{9}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]$.

4. $s = \ln 3$. 5. $s = \sqrt{3}\,(e-1)$.

c) **Vonalintegrálok**

1. $\int\limits_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \frac{749}{81}$. 2. $\int\limits_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = 32$.

3. $\int\limits_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = -\left(\frac{a^3}{3}+\frac{b^2}{2}\right)$. 4. $\int\limits_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \frac{51}{2}$.

5. $\int\limits_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \frac{3}{2}\pi$. 6. $\int\limits_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = -\frac{71}{6}$.

7. $\int_L v\,dr \approx 905{,}3.$ 8. $\int_L v\,dr = \frac{64\pi^3}{3} + 8\pi.$

9. $\int_L v\,dr = \frac{64\pi^3}{3} + 8\pi.$ 10. $\int_L v\,dr = -\frac{1}{8}.$

11. $\int_L p\,dr = \frac{75}{8}.$ 12. $\int_L p\,dr = fM\left(1 - \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$

13. $\int_L p\,dr = 225.$ 14. $\int_L p\,dr = 225.$

15. $\int_L p\,dr = \left[xy^2 + x^2z + yz^2\right]_{P_1}^{P_2} = 17.$

16. $\int_L p\,dr = \left[\frac{x^3}{3} + 5xy + 3xyz - 2y - 2z^2\right]_{P_1}^{P_2} = -123.$

17. $\int_L p\,dr = \left[x^2z - y^2z\right]_{P_1}^{P_2} = 3.$

18. $\int_L p\,dr = \left[e^{xy} + \cos xyz\right]_{P_1}^{P_2} = e - 2.$

19. $\int_L p\,dr = \left[x^2e^y - y^2e^z + z^2e^x\right]_{P_1}^{P_2} = e.$

20. $\int_L p\,dr = \left[ye^{x^2} - \ln xz^2\right]_{P_1}^{P_2} = 5e - 2\ln 2.$

21. $\Gamma = 2\pi a^2\omega.$ 22. $\Gamma = 4\pi a.$

d) Teljes differenciál integrálása, potenciál meghatározása

1. $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}.$ 2. $u = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$

3. $u = \sqrt{x^2 + y^2}.$ 4. $u = \ln(x + y + z).$

5. $u = x^y.$ 6. $u = e^{x^2y}.$

7. $u = x^2y - 2xy - y^2 - x.$ 8. $u = \sin(x + y) + \cos(x - y).$

9. $u = y\sin x + \cos(x - y).$ 10. $u = e^{xyz}.$

11. $u = \sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \cdot \sin y.$ 12. $u = x^3 - 3x^2y + y^3.$

13. $u = \frac{yx^2}{4 - z^2}$.

14. $u = x^2y - xz^2 + z^2y - xyz$.

15. $u = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + yz$.

16. $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + y - x^2y}{1 - 2xy - x^2}$.

17. $u = a^x b^y + \sin xy$.

18. $u = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}$.

19. $u = \arccos \frac{z}{xy}$

20. $u = \operatorname{arc\,tg} xy + x \sin y + x^y$.

8. §. Felületi integrálok

a) Felszín-integrálok

1. $z_s \approx 0{,}6$.
2. $z_s \approx 1{,}28$.

b) Felületi integrálok

1. $\iint\limits_F v\, df = 6\pi \ln 2$.

2. $\iint\limits_F v\, df = 64\left(\frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}\right)$.

3. $\iint\limits_F v\, df = -30$.

4. $\iint\limits_F v\, df = 4\pi^2$.

5. $\iint\limits_F v\, df = -24\pi$.

6. $\iint\limits_F v\, df = -\frac{74}{3}$.

7. $\iint\limits_F v\, df = \frac{14}{15}$.

8. $\iint\limits_F v\, df = -\frac{3}{35}$.

Felhasznált és ajánlott irodalom

1. *N. M. Gjunter—R. O. Kuzmin :* Felsőbb matematikai példatár. II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951).

2. *A. F. Bermant :* Matematikai analízis. II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)

3. *M. K. Grebencsa—Sz. I. Novoszjolov :* Matematikai analízis. II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.)

4. *R. Rothe :* Höhere Mathematik. IV. 5/6. (Teubner, Leipzig, 1948.)

5. *Szász Pál :* A differenciál- és integrálszámítás elemei. I., II. (Közoktatásügyi Kiadó, Budapest, 1951.)

6. *Stachó Tibor :* Felsőbb mennyiségtan. (Budapest, 1944. 2. kiadás.)

7. *R. Courant :* Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. II. (Springer, Berlin, 1931.)

8. *Г. М. Фихтенголц:* Курс дифференциального и интегрального исчисления. III. (Москва, 1949.)

9. *H. Mangoldt—K. Knopp :* Einführung in die höhere Mathematik. III. (S. Hirzel, Leipzig, 1932.)

10. *Békéssy—Freud—Marx—Nagy :* Elméleti fizikai feladatok. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)

11. *N. N. Buhgoljc—I. M. Voronkov—A. P. Minakov :* Elméleti mechanikai példatár. I., II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)

Raktári szám: 44 131/VII.

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: dr. Vágvölgyi Tibor igazgató
Újranyomásra előkészítette: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Bánfi Ferenc
A kézirat nyomdába érkezett: 1970. július hó – Megjelent: 1971. február hó
Példányszám: 1500 – Terjedelem: 9,5 (A/5) ív
Készült az 1965. évi második kiadás változatlan utánnyomásaként
íves magasnyomással, az MSZ 5601–59 és az MSZ 5602–55 szabvány szerint
70.4798 Egyetemi Nyomda, Budapest. Felelős vezető: Janka Gyula igazgató